Logika rozmyta

(ang. Fuzzy Logic)

Zbiory rozmyte

Za początek teorii zbiorów rozmytych uznaje się rok 1965, w którym to ukazała się w czasopiśmie „Information and Control" praca Zadeha pod tytułem „Fuzzy sets" [8].

Głównym motywem powstania i ciągłego rozwoju teorii zbiorów rozmytych jest chęć formalnego opisania takich nieprecyzyjnych określeń ze świata codziennego jak „bardzo ciepło", „niewielka prędkość", „raczej tak", itp.


IEEE
The 2007 IEEE
International Conference
on Granular Computing
is pleased to present to
Professor Lotfi A. Zadeh
in recognition and appreciation
for serving as a
keynote speaker
Award Committee Chair: T. Y. Lin
Dr. Lotfi A. Zadeh
HARVA

Logika rozmyta

Za początek teorii logiki rozmytej uznaje się rok 1920, w którym to ukazała się w pierwsza praca polskiego matematyka Jan Łukasiewicza dotycząca logiki trójwartościowej, burząc klasyczną dwu-wartościową (boolowską) logikę Arystotelesa. Wtedy to wyszły dwa podstawowe artykuły profesora Łukasiewicza:

J.Łukasiewicz, "O pojęciu możliwości", 1920
J. Łukasiewicz, "O logice trójwartościowej", 1920

Następne z tej tematyki to: *J.Łukasiewicz, "Philosophische Bemerkungen zu den mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküks", 1930*

Literatura

[1] Dubois D., Prade H., Operations on fuzzy numbers, *Int.J. System Sciencei* **9** (1978) 576-578
[2] Drewniak J.*Liczby rozmyte* w *Zbiory rozmyte i ich zastosowania*, J.Chojcan, J. Łęski (eds.) Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001 str. 103-129
[3] Yager R.R., Filer D.P.,Podstawy modelowania i sterowania rozmytego, WNT, Warszawa 1995.
[4] Driankov D., Hellendorn H.,Reinfrank M., Wprowadzenie do sterowania rozmytego, WNT, Warszawa 1996.
[5] Martos B., Nonlinear Programming. Theory and methods. (Polish translation of the English original published by Akadémiai Kiadó, Budapest 1975) PWN Warszawa 1983.
[6] Kosiński W, Weigl M., General mapping approximation problems solving by neural and fuzzy inference networks, IPPT, Warszawa 11-28,1998.
[7] Kosiński W, Weigl M., Reasoning in adaptative fuzzy expert systems, Intelligent Information Systems IV Proceedings of the Workshop held in Augustów, IPI PAN, Warszawa, Poland, 5-9 June 1995, str.257-272.
[8] Zadeh L.A. Fuzzy sets, Information and Control **8** (1965) 338-353
[9] Zadeh L.A., The concept of a linguistic variable and its application to aproximate reasoning, Part I, Information Sciences **8** (1975) 199-249.
[10] Assilian S.,Artificial intelligence in the control of real dynamical systems. (Praca doktorska) London University 1974
[11] Łachwa A. Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT Warszawa 2001
[12] Piegat A. Modelowanie i sterowanie rozmyte. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT Warszawa 1999

Definicja zbioru rozmytego

Zbiorem rozmytym A, na pewnej przestrzeni X, nazywamy zbiór par:

$$\mathbf{A=\{(x,\ \mu_x)\}\ \forall x \in X}$$

Gdzie μ_x jest stopniem przynależności elementu $x \in X$ (przyjętej przestrzeni rozważań X) do zbioru rozmytego A, przy czym $\mu_x \in [0,1]$.

Jest to definicja najogólniejsza, z jej pomocą będziemy w następnym wykładzie będziemy wprowadzać pewne uogólnienie pojęcia liczby rozmytej, potrzebne do zaproponowania zamkniętego na działania algebraiczne zbioru.

Definicja zbioru rozmytego

Definicja klasyczna: Zbiorem rozmytym A, na pewnej przestrzeni X, nazywamy zbiór par:

$$\mathbf{A=\{(x, \mu_A(x))\} \; \forall x \in X}$$

gdzie: μ_A jest funkcją która przypisuje każdemu elementowi $x \in X$ (przyjętej przestrzeni rozważań X, zwanej uniwersum) jego stopień przynależności do zbioru A, przy czym:

$\mu_A: X \rightarrow [0,1]$, zatem $\mu_A(x) \in [0,1]$.

Terminologia

Funkcja μ_A nazywana jest **funkcją przynależności**, zaś jej wartość dla danego argumentu nazywana jest **stopniem przynależności**. Stopień przynależności określa, w jakim stopniu rozpatrywany argument należy do zbioru rozmytego A.

Można zauważyć, że funkcja μ_A wraz z dziedziną jednoznacznie wyznaczają zbiór A, dlatego też w dalszej części pracy dotyczącej liczb rozmytych, oznaczenia te będą stosowane wymiennie w zależności od sensu treści, który należy uwypuklić i podkreślić.

Nośnik – wygodny parametr

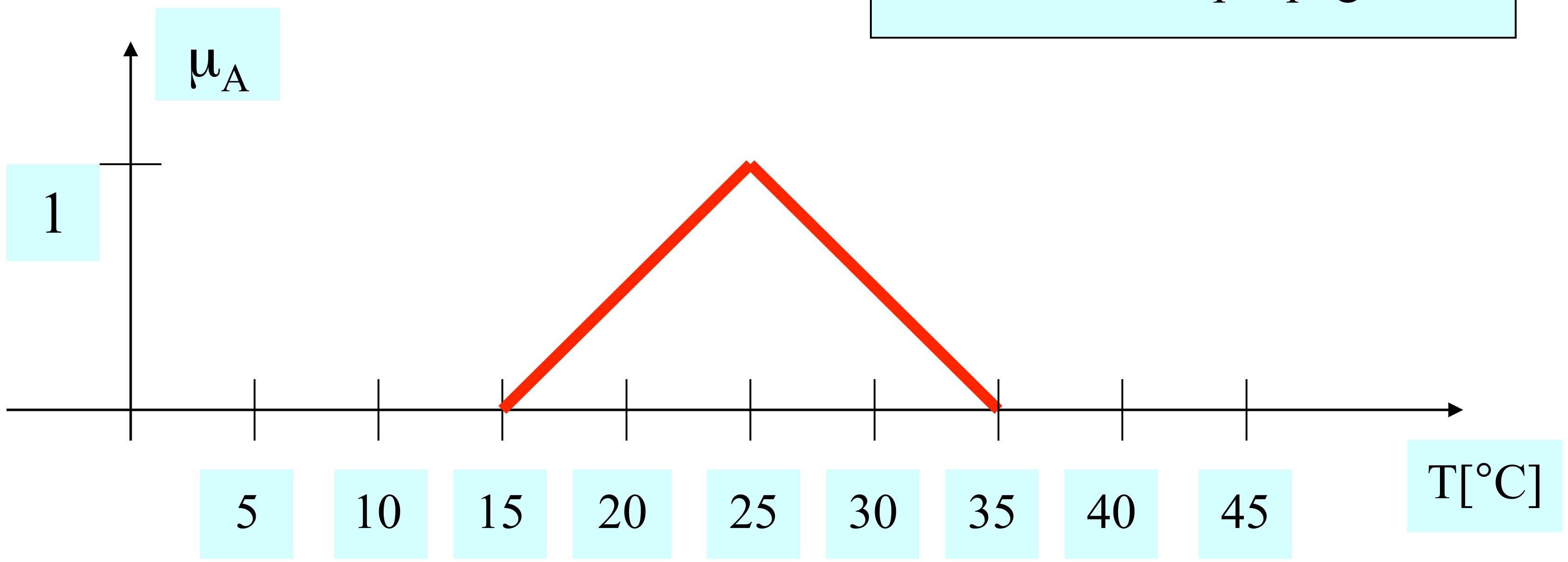
Wraz z definiowaniem zbioru rozmytego wyszczególnia się pewien jego integralny parametr pomocny przy określaniu i analizie różnych własności. Chodzi tu o **nośnik** (ang. support), który definiowany jest następująco:

$$\mathbf{supp(A)=\{x: \mu_A(x) > 0\}.}$$

Inaczej mówiąc, nośnikiem nazywamy taki podzbiór dziedziny funkcji przynależności, dla którego elementów, wartości funkcji są większe od zera.

Przykład

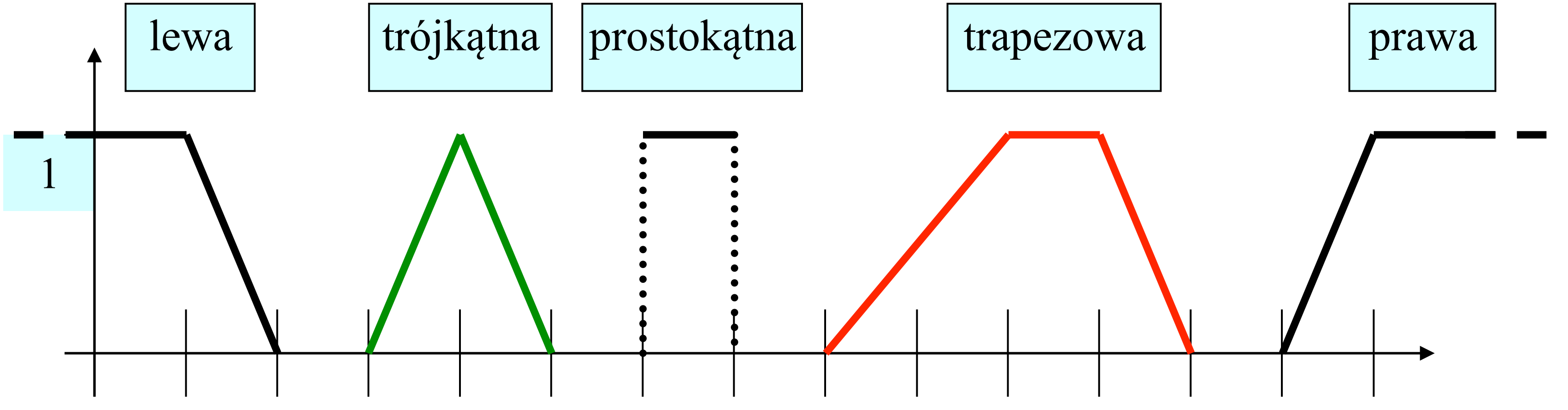
Zbiór rozmyty reprezentujący określenie „ciepła pogoda”.



Wykres prezentuje tylko część funkcji odpowiadającą nośnikowi.

Przykłady

Popularna klasyfikacja liczb rozmytych



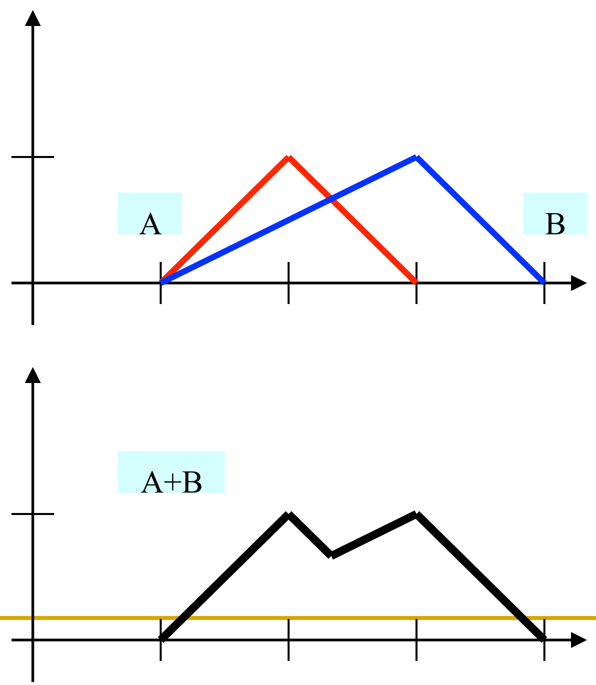
Dużo więcej i bardziej szczegółowych informacji o sposobach klasyfikacji zbiorów rozmytych i ich opisu proponuję szukać u Łachwy[11], Piegata[12]

Zbiory jako liczby

Liczby rozmyte to szczególny przypadek zbiorów rozmytych. Poniżej przedstawiony jest efekt zastosowania działań ze zbiorów do liczb rozmytych.

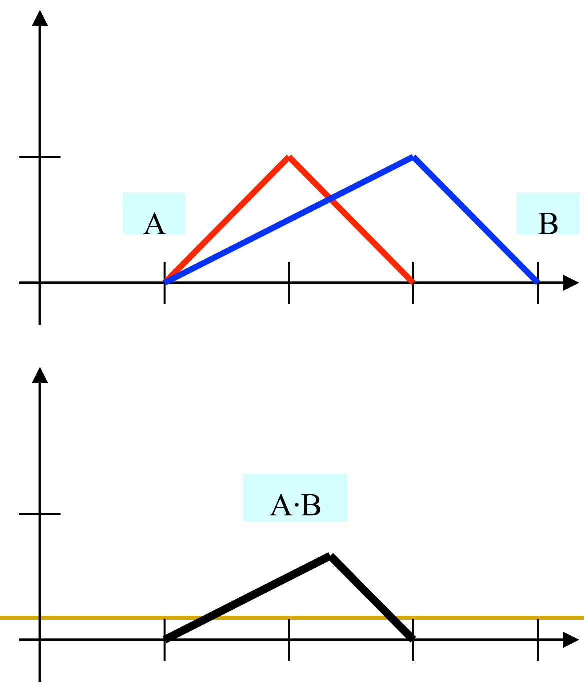
Suma:

$\mathbf{A+B = \mu_{A+B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))}$



Iloczyn:

$\mathbf{A*B = \mu_{A*B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))}$



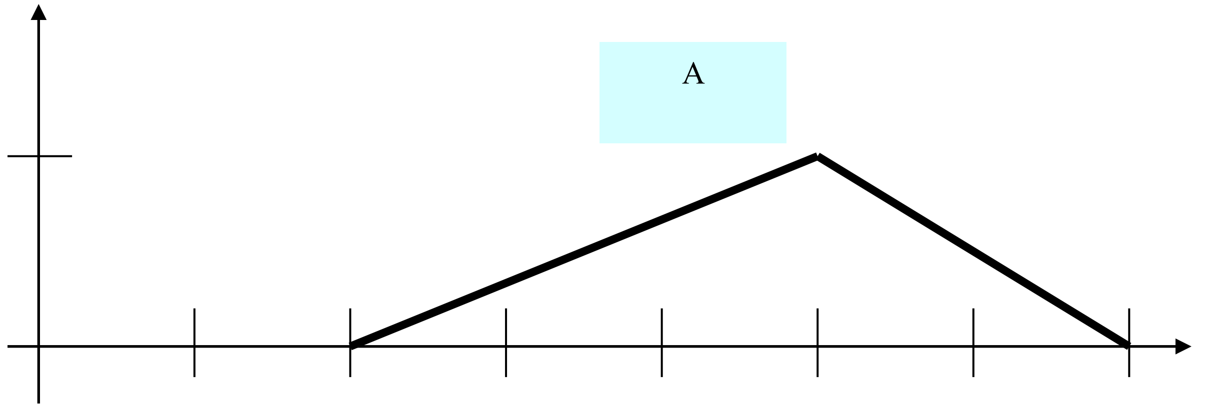
Zbiory a liczby rozmyte

Według definicji uznawanej przez znaczną część naukowców zajmujących się tą tematyką, liczba rozmyta jest zbiorem rozmytym określonym na uniwersum liczb rzeczywistych **R**, jeśli stopień przynależności każdego elementu z X jest wyznaczany przez funkcję, zwaną funkcją przynależności. Wymaga się od tej funkcji własności:

• jest normalna, czyli istnieje argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 1,

• jest wypukła,

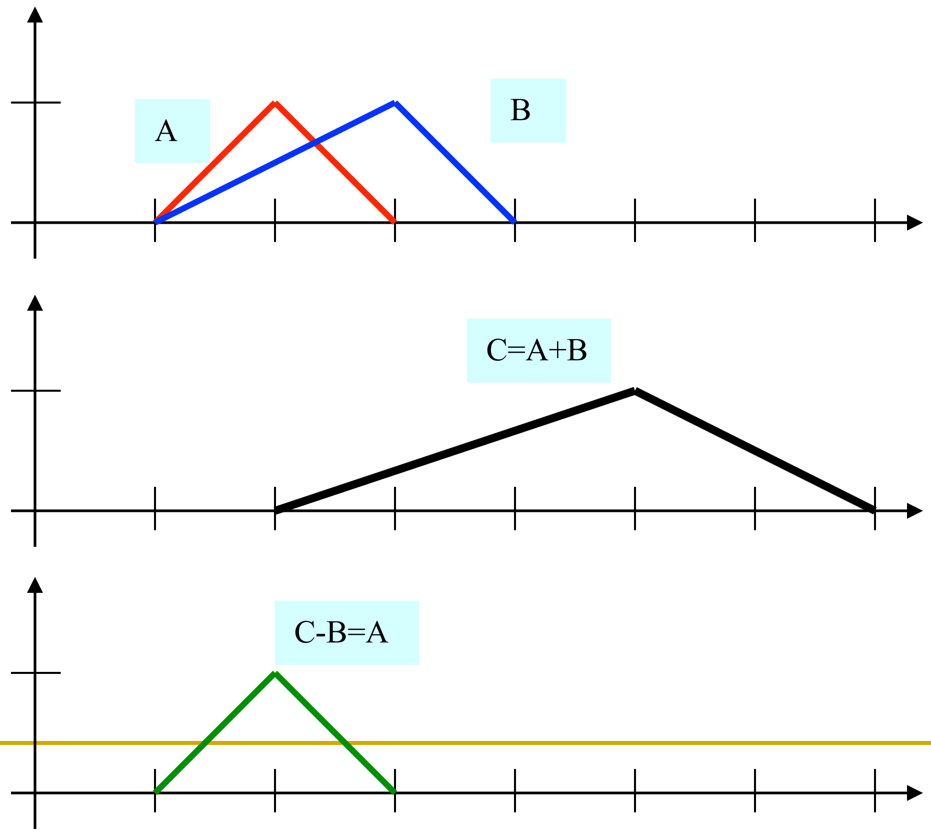
• jest funkcją przedziałami ciągłą.



Rozważając własności klasycznej liczby rozmytej A możemy podkreślić, że charakteryzuje się ona dwoma przedziałami rzeczywistymi l_A oraz p_A. Przedziały te charakteryzują się tym, że na lewym l_A funkcja przynależności jest rosnąca, zaś na prawym p_A - malejąca.

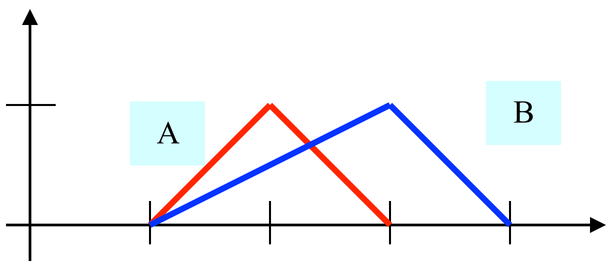
Arytmetyka przedziałowa w liczbach rozmytych

Liczby rozmyte to szczególny przypadek zbiorów rozmytych określonych na zbiorze liczb rzeczywistych w związku z czym **nośnik** jest przedziałem rzeczywistym, zatem działania można zdefiniować w oparciu o działania na przedziałach rzeczywistych.

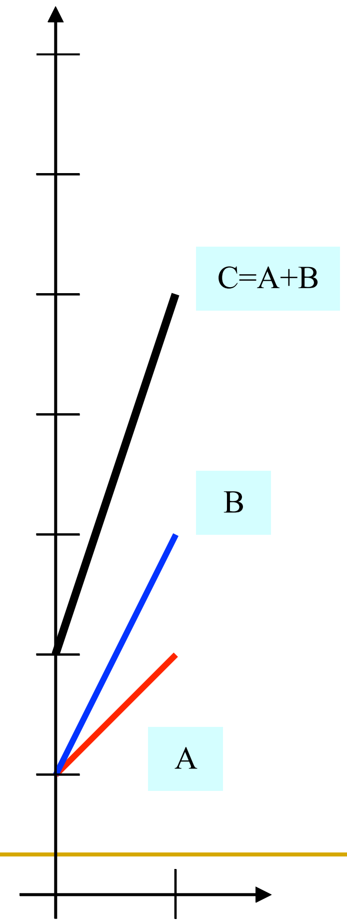


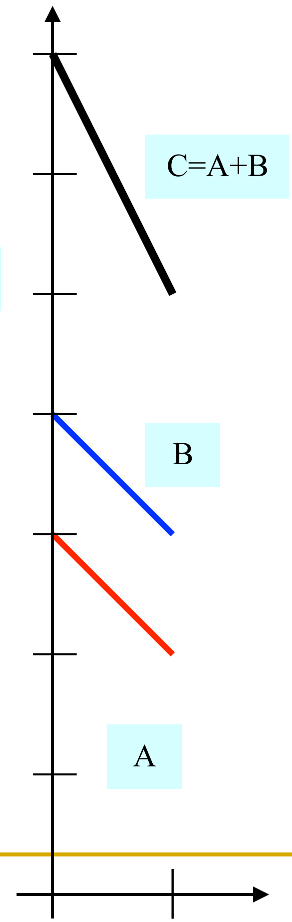
Propozycja

Operacje na liczbach rozmytych wykonujemy, odpowiednio, na odpowiadających sobie odwróconych częściach funkcji przynależności.

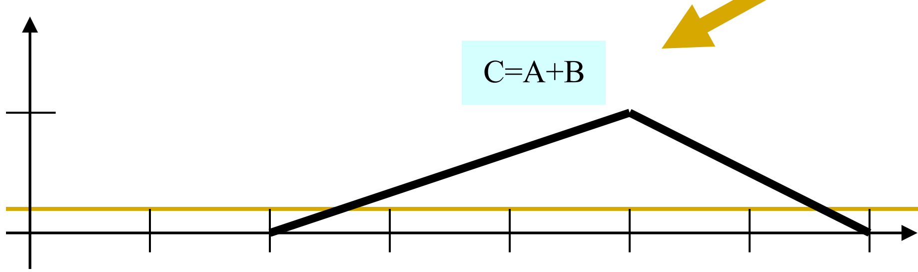


Odwracamy i wykonujemy dodawanie na funkcjach



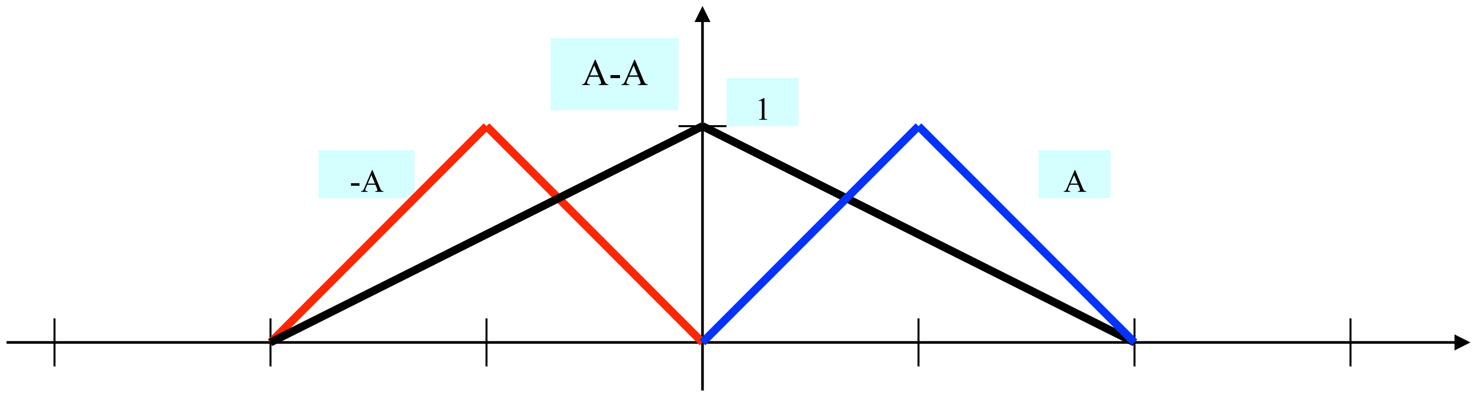


Funkcje otrzymane w wyniku działań odwracamy ponownie



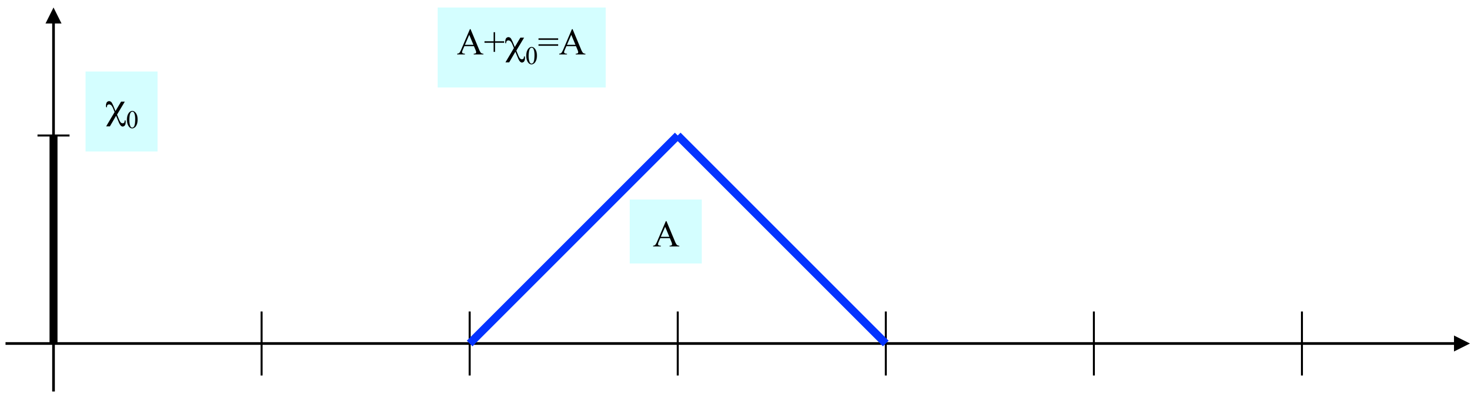
Uwagi

Wynik działania **A-A** nie jest elementem neutralnym



Element neutralny względem dodawania

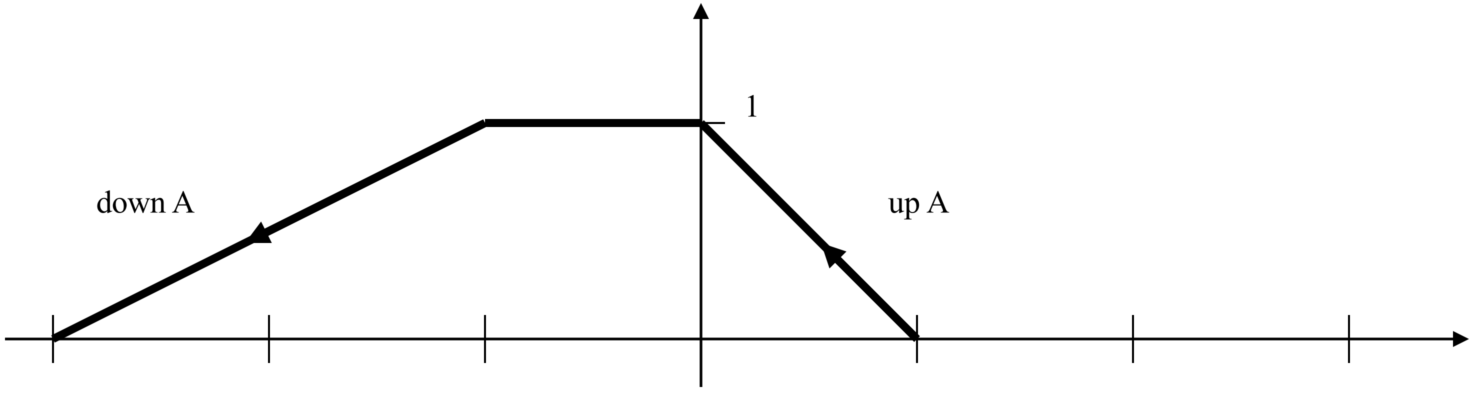
Elementem neutralnym jest funkcja charakterystyczna liczby zero χ_0, tak jak w przypadku liczb rzeczywistych.

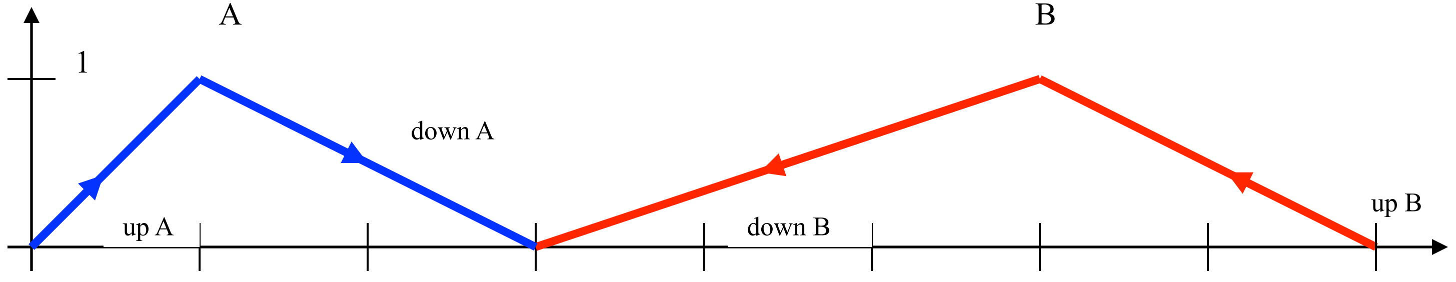


Intuicje

1. Wykorzystując działania arytmetyki przedziałowej, w sytuacji gdy obliczamy liczbę przeciwną (mnożymy przez –1), otrzymujemy sytuację niezgodną z naszą intuicją. Działając na przedziale lewym otrzymujemy przedział prawy, zaś z prawego – lewy .
2. Traktujemy zbiór par tworzący liczbę rozmytą jako **listę**, która ma swój początek i koniec.
3. Wyposażamy ten zbiór (liczbę rozmytą) w **skierowanie**.

Przykłady





Działania

Po wprowadzeniu skierowania do modelu, działania wykonywane są następująco:

Suma:

Przez sumę A+B dwóch właściwych liczb rozmytych rozumiemy liczbę C:

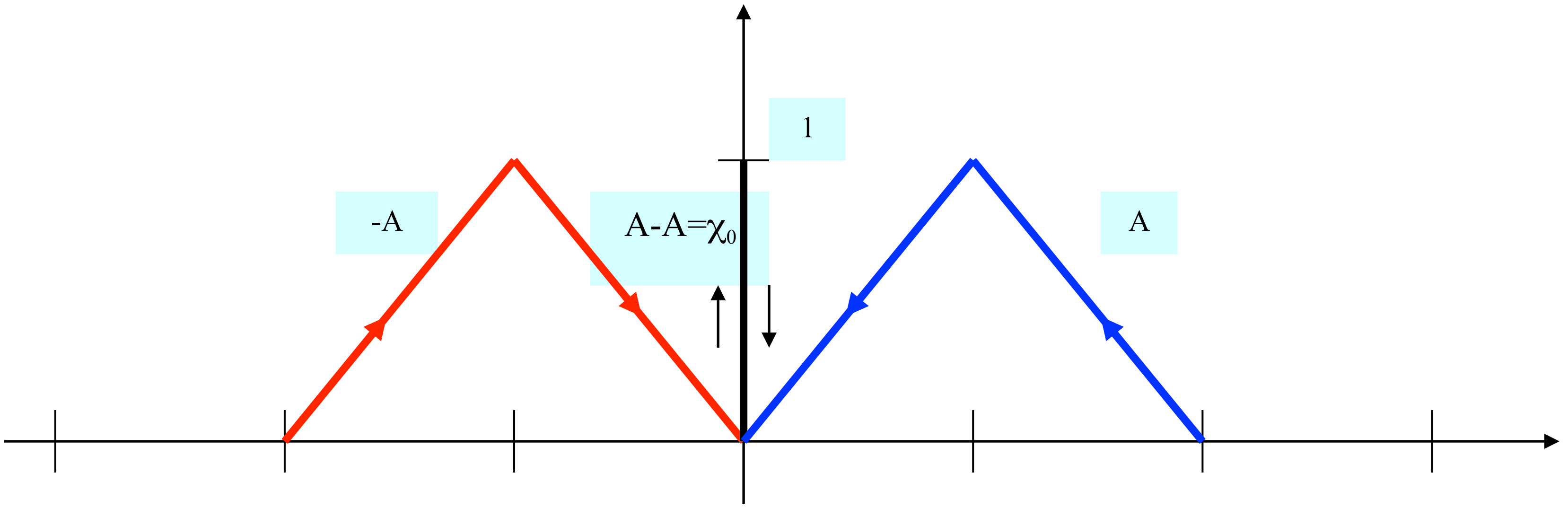
$$\mathbf{(C \mid up(C))^{-1} = (A \mid up(A))^{-1} + (B \mid up(B))^{-1}}$$
$$\mathbf{(C \mid down(C))^{-1} = (A \mid down(A))^{-1} + (B \mid down(B))^{-1}}$$

Odejmowanie jest po prostu dodaniem liczby przeciwnej, którą otrzymujemy poprzez przemnożenie liczby rozmytej przez liczbę rzeczywistą –1:

-A(x)=A(-x) oraz skierowanie –A jest przeciwne do skierowania A

Przy tak zdefiniowanych działaniach operacja odejmowania pozwala nam otrzymać jednoznaczny wynik A-A=0, gdzie przy klasycznym modelu liczb rozmytych przedstawionym np. przez Drewniaka[8] otrzymywaliśmy rozmyte zero czyli „około zero".

Efekt modyfikacji modelu i działań



Rozszerzamy model liczb rozmytych. Próba pierwsza

Skierowaną liczbę rozmytą rozumiemy jako trójkę $A=(R,\mu_A,s_A)$, gdzie $\mu_A: R \rightarrow [0,1]$ jest funkcją przynależności, zaś $s_A \in \{-1,0,1\}$ oznacza skierowanie.

Funkcja przynależności μ_A ma następujące własności:

1. μ_A jest normalna np. $1 \in \mu_A(R)$,
2. nośnik jest przedziałem (l_A,p_A) i $l_A,p_A \in R$,
3. $-\mu_A$ jest ściśle quasi-wypukła (czyli μ_A jest ściśle quasi-wklęsła).

Dzięki warunkowi ścisłej quasi-wypukłości (szczegóły opisywane przez Martosa [5]) liczby rozmyte, a konkretnie ich funkcje przynależności są quasi-odwracalne czyli możemy zastosować działania z poprzedniego slajdu.

Dzięki takim definicjom można wyszczególnić części liczby rozmytej A :

- wzrastającą zgodnie ze skierowaniem – **up(A)**
- malejącą zgodnie ze skierowaniem – **down(A)**

Literatura

[1] Dubois D., Prade H., Operations on fuzzy numbers, *Int.J. System Sciencei* **9** (1978) 576-578

[2] Drewniak J.*Liczby rozmyte* w *Zbiory rozmyte i ich zastosowania*, J.Chojcan, J. Łęski (eds.) Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001 str. 103-129

[3] Yager R.R., Filer D.P.,Podstawy modelowania i sterowania rozmytego, WNT, Warszawa 1995.

[4] Driankov D., Hellendorn H.,Reinfrank M., Wprowadzenie do sterowania rozmytego, WNT, Warszawa 1996.

[5] Martos B., Nonlinear Programming. Theory and methods. (Polish translation of the English original published by Akadémiai Kiadó, Budapest 1975) PWN Warszawa 1983.

[6] Kosiński W, Weigl M., General mapping approximation problems solving by neural and fuzzy inference networks, IPPT, Warszawa 11-28,1998.

[7] Kosiński W, Weigl M., Reasoning in adaptative fuzzy expert systems, Intelligent Information Systems IV Proceedings of the Workshop held in Augustów, IPI PAN, Warszawa, Poland, 5-9 June 1995, str.257-272.

[8] Zadeh L.A. Fuzzy sets, Information and Control **8** (1965) 338-353

[9] Zadeh L.A., The concept of a linguistic variable and its application to aproximate reasoning, Part I, Information Sciences **8** (1975) 199-249.

[10] Assilian S.,Artificial intelligence in the control of real dynamical systems. (Praca doktorska) London University 1974

[11] Łachwa A. Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT Warszawa 2001

[12] Piegat A. Modelowanie i sterowanie rozmyte. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT Warszawa 1999

Dziękuję za uwagę...