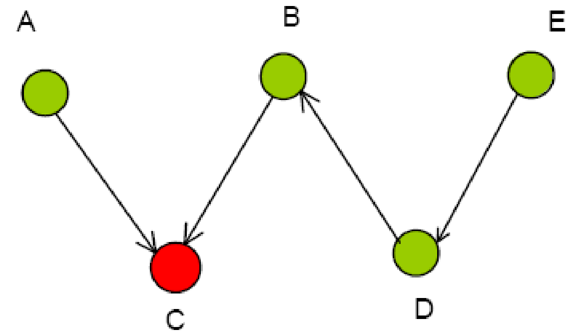
Sieci Bayes'a

dr inż. Jacek Czerniak

Rodzaje niepewności

- Niepewność stochastyczna np. Nieszczęśliwy wypadek, ryzyko ubezpieczenia, wygrana w lotto(metody rachunku prawdopodobieństwa)
- Niepewność wynikająca z niedokładności pomiarowej np.temp, czasu, wymiarów obiektu (metody statystyki)
- Niepewność informacyjna (np. Wiarygodny kredytobiorca, wiarygodność informacji (data mining, szukanie prawidłowości)
- Niepewność lingwistyczna–wysoko, mało, zimno, szybko (zbiory rozmyte, zbiory przybliżone)

Definicja sieci Bayesowskiej



Sieć bayesowska to acykliczny (nie zawierający cykli) graf skierowany, w którym:

- węzły reprezentują zmienne losowe (np. temperaturę jakiegoś źródła, stan pacjenta, cechę obiektu itp.)
- łuki (skierowane) reprezentują zależność typu „ zmienna X ma bezpośredni wpływ na zmienna Y”,
- każdy węzeł X ma stowarzyszona z nim tablice prawdopodobieństw warunkowych określających wpływ wywierany na X przez jego poprzedników (rodziców) w grafie,
- Zmienne reprezentowane przez węzły przyjmują wartości dyskretne (np.: TAK, NIE).

Konstruowanie sieci bayesowskiej

- zdefiniowanie zmiennych,
- zdefiniowanie połączeń pomiędzy zmiennymi,
- określenie prawdopodobieństw warunkowych i ”a priori” (łac. z założenia)
- wprowadzenie danych do sieci,
- uaktualnienie sieci,
- wyznaczenie prawdopodobieństw ”a posteriori” (łac. z następstwa)

Bayesian networks

Sieci Bayesowskie (*belief networks, Bayesian belief networks)* *nazywane są czasami tzw. sieciami przekonaniowymi lub przyczynowymi. Bayesowskie dlatego, że bazują na podstawach teorii decyzji i teorii prawdopodobieństwa Twierdzenie bayesa wyraża obliczenie konieczne do wykonania w celu przekonania się o prawdziwości wcześniejszych przekonań w świetle nowych dowodów:*

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)}{P(B)} * P(A)$$

$$P(A|B)=\frac{P(A,B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)}{P(B)}*P(A)$$

Wyrażenie *P(A|B)* oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia *A* zależnego od zdarzenia *B* – a więc *A* jest prawdziwe, jeśli *B* miało miejsce. Dwie wartości są istotne:

1. Iloraz prawdopodobieństw *P(B|A)/P(B)* które mówi jak ważne pod względem informacyjnym jest zdarzenie *B* w odniesieniu do zdarzenia *A*,
2. Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* (P(A)) wyliczone jeszcze przed zajściem zdarzenia *B.*

Twierdzenie Bayesa dla prostych zdarzeń

Jeśli A i B są prostymi zdarzeniami w przestrzeni prób, to prawdopodobieństwo warunkowe P(A/B) będzie określone jako:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{liczba\ wyników\ \ zarówno\ \ w\ \ A\ jak\ \ i\ \ B}{liczba\ \ wyników\ \ w\ \ B}$$

Również P(B/A) = P(A$\cap$B)/P(A). Przekształcając ten wzór, otrzymujemy wzór na przecięcie zdarzeń P(A$\cap$B) = P(B/A)P(A) i po podstawieniu mamy:

$$P(A|B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

Co jest tezą twierdzenia Bayesa dla prostych zdarzeń.

Sieć bayesowska koduje informacje o określonej dziedzinie za pomocą wykresu, którego wierzchołki wyrażają zmienne losowe, a krawędzie obrazują probabilistyczne zależności między nimi.

Węzeł A jest rodzicem lub poprzednikiem wierzchołka X, a wierzchołek X jest potomkiem lub następnikiem węzła A, jeżeli istnieje bezpośrednia krawędź z wierzchołka A do X.

$$p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_m = x_m) = \bigcap_{i=1}^{m} p(X_i = x_i |_{rodzice(X_i)})$$

A więc prawdopodobieństwo pojawienia się wierzchołka potomnego zależy tylko od jego rodziców !

Sieć Bayesowska - graf

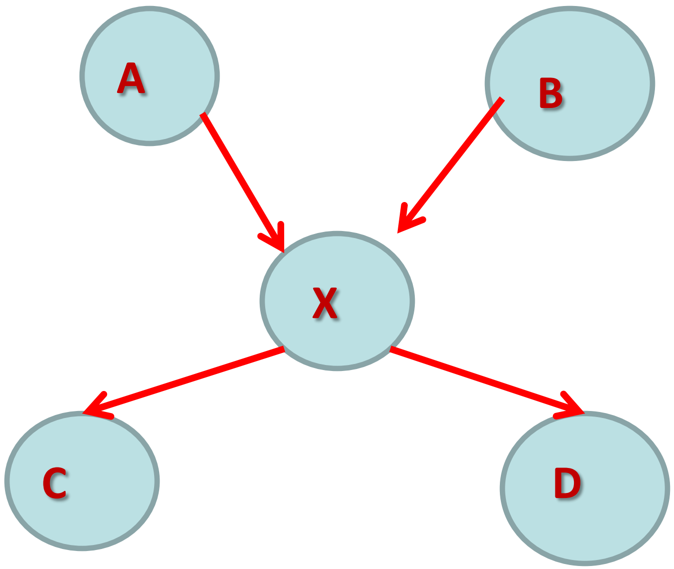
A – pogoda
(słonecznie/pochmurno/deszczowo/wietrznie)

B – czas wolny (tak/nie)

X – humor (bardzo dobry/dobry/nietęgi)

C – zajęcie na zewnątrz (spacer/basen/rower)

D – zajęcie w domu(komputer/książka/gotowanie)



If A=a1 and B=b1 then X=x1 with 30%
If A=a1 and B=b1 then X=x2 with 30%
If A=a1 and B=b1 then X=x2 with 40%

If A=a1 and B=b2 then X=x1 with 20%
If A=a1 and B=b2 then X=x2 with 40%
If A=a1 and B=b2 then X=x2 with 40%

If A=a2 and B=b1 then X=x1 with 10%
If A=a2 and B=b1 then X=x2 with 30%
If A=a2 and B=b1 then X=x2 with 60%

If A=a2 and B=b2 then X=x1 with 5%
If A=a2 and B=b2 then X=x2 with 35%
If A=a2 and B=b2 then X=x2 with 60%

If A=a3 and B=b1 then X=x1 with 40%
If A=a3 and B=b1 then X=x2 with 40%
If A=a3 and B=b1 then X=x2 with 20%

If A=a3 and B=b2 then X=x1 with 20%
If A=a3 and B=b2 then X=x2 with 50%
If A=a3 and B=b2 then X=x2 with 30%

If A=a4 and B=b1 then X=x1 with 60%
If A=a4 and B=b1 then X=x2 with 35%
If A=a4 and B=b1 then X=x2 with 5%

If A=a4 and B=b2 then X=x1 with 30%
If A=a4 and B=b2 then X=x2 with 40%
If A=a4 and B=b2 then X=x2 with 30%

P(X|A,B)	x1	x2	x3
a1b1	0.3	0.3	0.4
a1b2	0.2	0.4	0.4
a2b1	0.1	0.3	0.6
a2b2	0.05	0.35	0.6
a3b1	0.4	0.4	0.2
a3b2	0.2	0.5	0.3
a4b1	0.6	0.35	0.05
a4b2	0.3	0.4	0.3

A	
a1	0.25
a2	0.25
a3	0.25
a4	0.25

B	
b1	0.4
b2	0.6

P(X|A,B)	x1	x2	x3
a1b1	0.3	0.3	0.4
a1b2	0.2	0.4	0.4
a2b1	0.1	0.3	0.6
a2b2	0.05	0.35	0.6
a3b1	0.4	0.4	0.2
a3b2	0.2	0.5	0.3
a4b1	0.6	0.35	0.05
a4b2	0.3	0.4	0.3

P(C|X)	c1	c2	c3
X1	0.1	0.2	0.7
X2	0.2	0.6	0.2
X3	0.5	0.4	0.1

P(DX)	d1	d2	d3
X1	0.1	0.3	0.6
X2	0.7	0.2	0.1
X3	0.3	0.4	0.3

A	
a1	0.25
a2	0.25
a3	0.25
a4	0.25

B	
b1	0.4
b2	0.6

P(X|A,B)	X1	x2	x3
a1b1	0.3	0.3	0.4
a1b2	0.2	0.4	0.4
a2b1	0.1	0.3	0.6
a2b2	0.05	0.35	0.6
a3b1	0.4	0.4	0.2
a3b2	0.2	0.5	0.3
a4b1	0.6	0.35	0.05
a4b2	0.3	0.4	0.3

P(C|X)	c1	c2	c3
X1	0.1	0.2	0.7
X2	0.2	0.6	0.2
X3	0.5	0.4	0.1

P(DX)	d1	d2	d3
X1	0.1	0.3	0.6
X2	0.7	0.2	0.1
X3	0.3	0.4	0.3

$$p(A=a_4, B=b_2, C=c_1, D=d_2, X=x_3)=$$

$$p(A=a_4)\,p(B=b_2)\,p(X=x_3 \mid A=a_4 \cap B=b_2)\,p(C=c_1 \mid X=x_3)\,p(D=d_2 \mid X=x_3)$$

$$p(A=a_4, B=b_2, C=c_1, D=d_2, X=x_3)=$$

$$p(A=a_4)\,p(B=b_2)\,p(X=x_3 \mid A=a_4 \cap B=b_2)\,p(C=c_1 \mid X=x_3)\,p(D=d_2 \mid X=x_3)=$$

$$0.25*0.4*0.05*0.5*0.4=0.001$$

B	
b1	0.4
b2	0.6

A	
a1	0.25
a2	0.25
a3	0.25
a4	0.25

P(X|A,B)	X1	x2	x3
a1b1	0.3	0.3	0.4
a1b2	0.2	0.4	0.4
a2b1	0.1	0.3	0.6
a2b2	0.05	0.35	0.6
a3b1	0.4	0.4	0.2
a3b2	0.2	0.5	0.3
a4b1	0.6	0.35	0.05
a4b2	0.3	0.4	0.3

$$p(X = x_1 \mid A = a_1 \cap B = b_1) * p(A = a_1) * p(B = b_1) =$$
$$0.3 * (0.25 * 0.4) = 0.3 * 0.1 = 0.03$$

A	
a1	0.25
a2	0.25
a3	0.25
a4	0.25

B	
b1	0.4
b2	0.6

P(X|A,B)	X1	x2	x3
a1b1	0.3	0.3	0.4
a1b2	0.2	0.4	0.4
a2b1	0.1	0.3	0.6
a2b2	0.05	0.35	0.6
a3b1	0.4	0.4	0.2
a3b2	0.2	0.5	0.3
a4b1	0.6	0.35	0.05
a4b2	0.3	0.4	0.3

P(C|X)	c1	c2	c3
X1	0.1	0.2	0.7
X2	0.2	0.6	0.2
X3	0.5	0.4	0.1

P(DX)	d1	d2	d3
X1	0.1	0.3	0.6
X2	0.7	0.2	0.1
X3	0.3	0.4	0.3

$$p(X = x_1) = p(X = x_1 \mid A = a_1 \cap B = b_1)\, p(A = a_1 \cap B = b_1) +$$
$$p(X = x_1 \mid A = a_1 \cap B = b_2)\, p(A = a_1 \cap B = b_2) +$$
$$p(X = x_1 \mid A = a_2 \cap B = b_1)\, p(A = a_2 \cap B = b_1) +$$
$$p(X = x_1 \mid A = a_2 \cap B = b_2)\, p(A = a_2 \cap B = b_2) +$$
$$p(X = x_1 \mid A = a_3 \cap B = b_1)\, p(A = a_3 \cap B = b_1) +$$
$$p(X = x_1 \mid A = a_3 \cap B = b_2)\, p(A = a_3 \cap B = b_2) +$$
$$p(X = x_1 \mid A = a_4 \cap B = b_1)\, p(A = a_4 \cap B = b_1) +$$
$$p(X = x_1 \mid A = a_4 \cap B = b_2)\, p(A = a_4 \cap B = b_2) =$$

$$0.3*0.1+0.2*0.15+0.1*0.1+0.05*0.15+0.4*0.1+0.2*0.15+0.6*0.1+0.3*0.15=0.2525$$

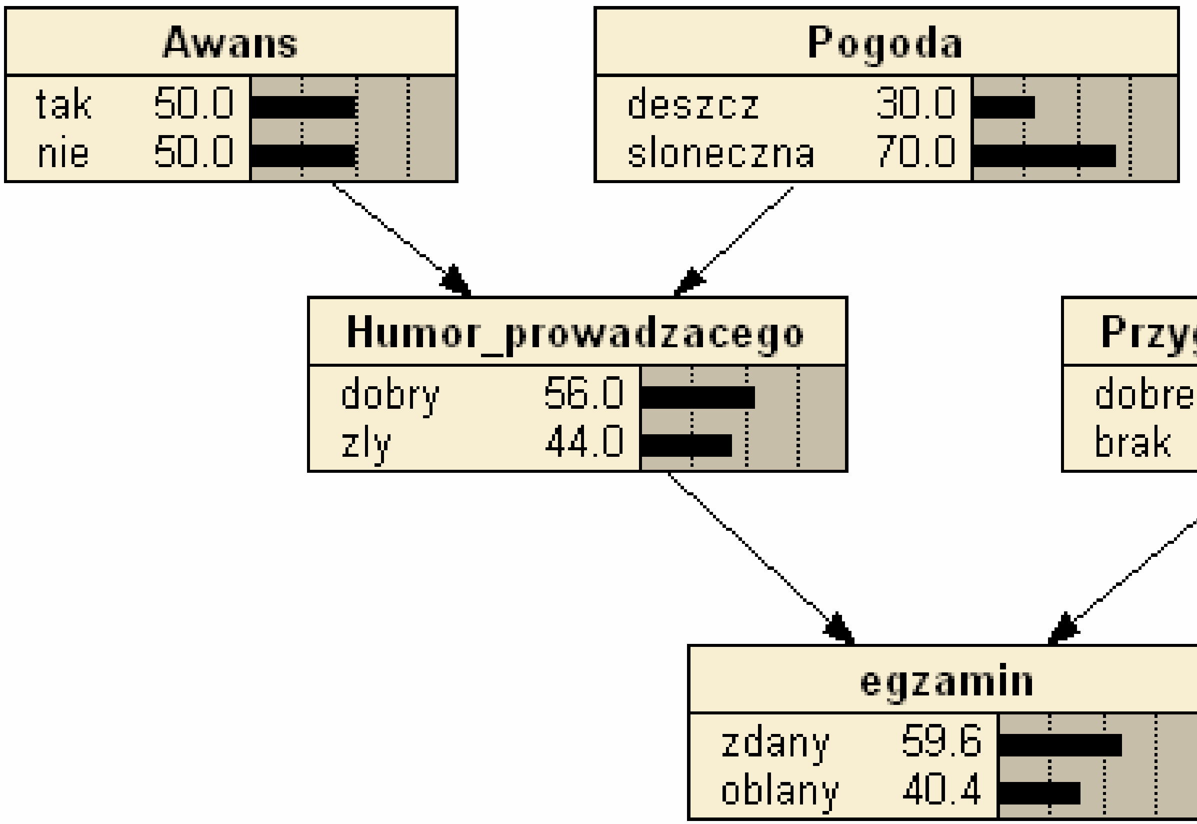
Przykład – wnioskowanie w sytuacji niepewności

Jakie są szanse zdania ustnego egzaminu u prof. X, który jest kibicem Wisły i nie lubi deszczu?

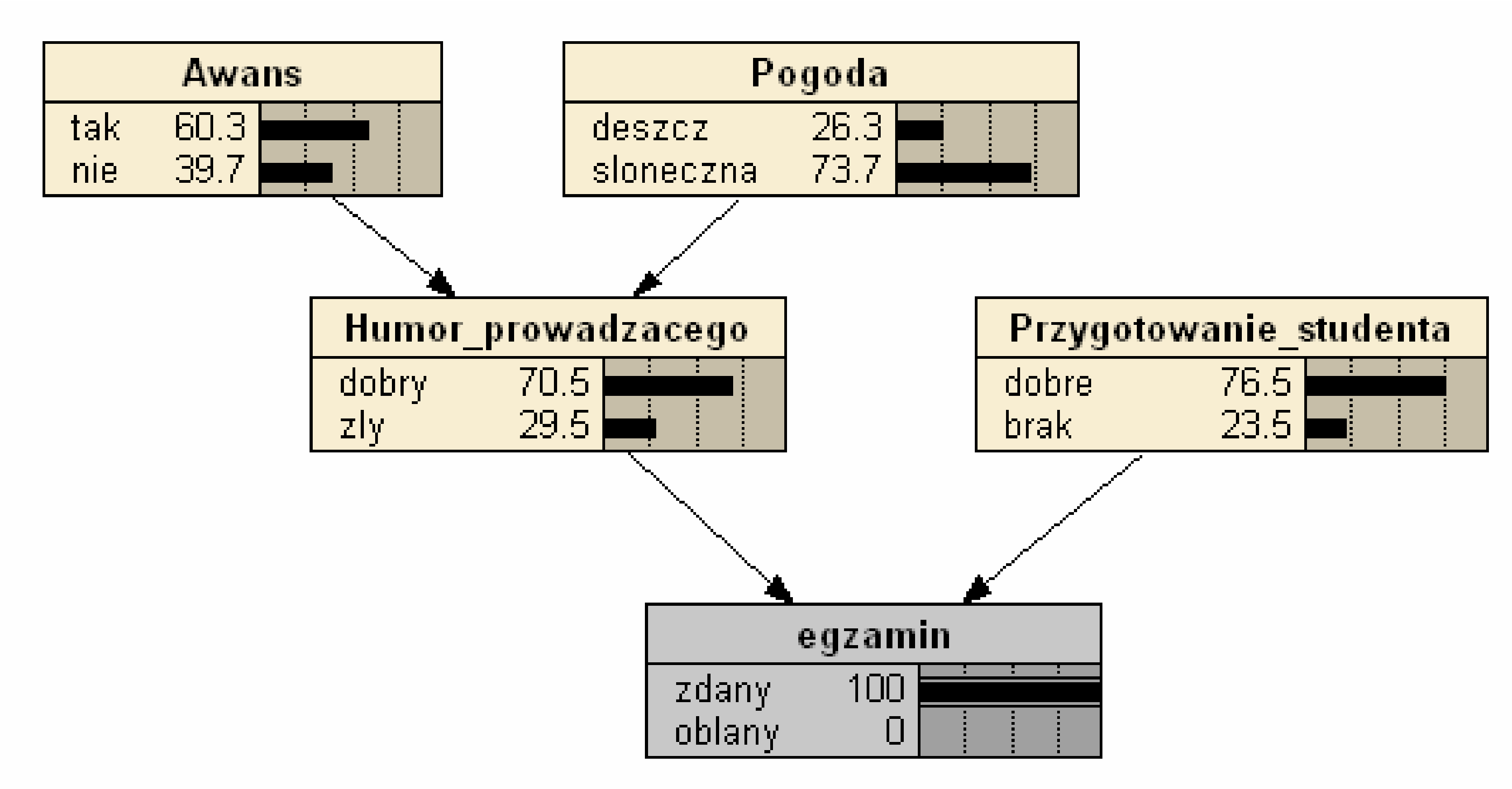
Wynik egzaminu zależy od:

- dobrego przygotowania studenta
- dobrego humor egzaminatora
- awansu Wisły do Ligi Mistrzów
- Deszczu – by nie padał !!!

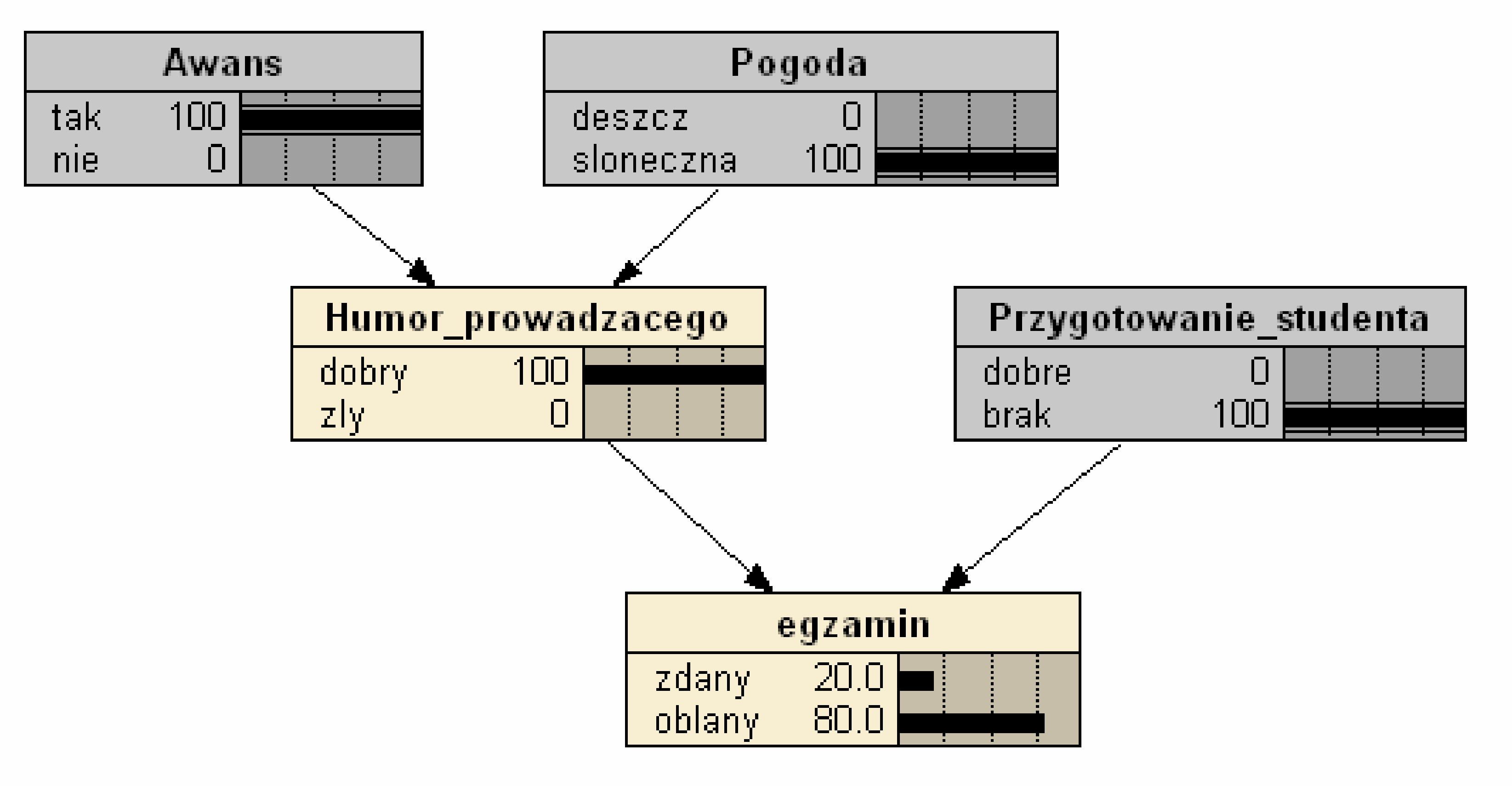
Jak prawdopodobne jest zdanie egzaminu gdy humor egzaminatora i przygotowanie studenta jest pewne w skali „pół na pół” ?



Jak prawdopodobne jest zdanie egzaminu gdy humor egzaminatora i przygotowanie studenta jest pewne przynajmniej w 70 % ?



Jak prawdopodobne jest zdanie egzaminu gdy humor egzaminatora jest dobry ale przygotowanie studenta niestety fatalne ! ?



Zastosowanie Sieci Bayesowskich

- Sieci te mają wiele zastosowań m.in. w Sztucznej inteligencji, medycynie (w diagnozowaniu), w genetyce, statystyce, w ekonomii.
- O popularności SB zadecydowało to, że są dla nich wydajne metody wnioskowania. Możliwe jest proste wnioskowanie o zależności względnej i bezwzględnej badanych atrybutów.
- Niezależność może tak zmodularyzować naszą wiedzę, że wystarczy zbadanie tylko części informacji istotnej dla danego zapytania, zamiast potrzeby eksploracji całej wiedzy.
- Sieci Bayesowskie mogą być ponadto rekonstruowane, nawet jeśli tylko część właściwości warunkowej niezależności zmiennych jest znana. Inną cechą SB jest to, że taką sieć można utworzyć mając niepełne dane na temat zależności warunkowej atrybutów.

Definicja SB

Sięcią Bayesowską (Jensen, 1996) nazywamy parę (*D,P*), gdzie *D* jest skierowanym grafem acyklicznym (directed acyclic graph DAG) a *P*-rozkładem prawdopodobieństwa. Każdy wierzchołek w sieci przechowuje rozkład $P(X_i | _{\pi(i)})$ gdzie $X_{\pi(i)}$ jest zbiorem wierzchołków odpowiadających $\pi(i)$ – poprzednikom (rodzicom) wierzchołka (*i*).

Rozkład prawdopodobieństw w SB

Rozkład prawdopodobieństw zapisuje się jako:

$$P(x_1,\ldots,x_n) = \bigcap_{i=1}^{n} P(x_i \mid X_{\pi(i)})$$

W grafie wierzchołki są etykietowane nazwami atrybutów. Przy każdym wierzchołku występuje tabela prawdopodobieństw warunkowych pomiędzy danym wierzchołkiem i jego rodzicami.

Rodzaje wnioskowań w SB:

- O wiarygodności poszczególnych hipotez dla zdanych obserwacji
- Poszukiwanie uzasadnienia dla zadanej hipotezy i obserwacji
- Znalezienie prawdodobieństwa prawdziwości wyrażenia logicznego przedstawionego w postaci koniunkcji wyrażeń elementarnych atrybut = wartość
- Znalezienie odpowiedzi na złożone zapytanie
- O brzegowej i warunkowej niezależności zmiennych.

Metoda propagacji niepewności metodą lokalnych obliczeń

1990 rok – *Shafer i Shenoy* oraz *Lauritzen i Jensen* – niezależnie opracowują tę samą efektywną metodę polegającą na tym, że:

- Wnioskowanie w danym węźle odbywa się tylko na podstawie własnego wartościowania i wiadomości uzyskanych od wszystkich sąsiadów bezpośrednich.
- Węzeł wysyła do drugiego węzła wiadomość będącą złożeniem wiadomości uzyskanych od wszystkich pozostałych sąsiadów i własnego wartościowania.
- Gdy węzeł uzyska wiadomości od wszystkich sąsiadów wówczas na ich podstawie aktualizuje własne wartościowanie, otrzymując wartościowanie pod warunkiem zadanych obserwacji.

Własności prawdopodobieństwa Bayesa

$$P(A \mid B) + P(\neg A \mid B) = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n_A} P(A = v_k \mid B) = 1$$

Klasyfikacja metodą Bayesa–prawdopodobieństwo warunkowe i bezwarunkowe

- Klasyfikacja Bayesowska jest klasyfikacją statystyczną. Pozwala przewidzieć prawdopodobieństwo przynależności obiektu do klasy. Opiera się na twierdzeniu Bayesa.
- Niech dany będzie obiekt o o właściwości X. Niech H będzie hipotezą, że obiekt o należy do klasy C. Z punktu widzenia zadania klasyfikacji chcemy obliczyć prawdopodobieństwo P(H|X) tego, że dla obiektów o właściwości X prawdziwa jest hipoteza H.
- P(H|X) jest tzw. prawdopodobieństwem warunkowym (a posteriori) zdarzenia H pod warunkiem zajścia zdarzenia X.
- Przykład: Rozważamy populację owoców. Przypuśćmy, że rozważaną właściwością X obiektu o jest:X : „o jest owocem okrągłym i czerwonym”, a H jest hipotezą:

H : „o jest jabłkiem”.

- Wówczas P(H|X) wyraża nasze przekonanie, że owoc jest jabłkiem, jeśli zaobserwowaliśmy, że jest on okrągły i czerwony.

Przeciwieństwem prawdopodobieństwa warunkowego jest *prawdopodobieństwo bezwarunkowe*. W naszym przypadku P(H) wyrażające prawdopodobieństwo, że każdy zaobserwowany owoc jest jabłkiem, jest prawdopodobieństwem bezwarunkowym (a priori).

Prawdopodobieństwo warunkowe, P(H|X), uwzględnia więcej informacji (wiedza X), podczas gdy prawdopodobieństwo bezwarunkowe P(H) jest niezależne od X.

Podobnie, P(X|H) jest prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia X pod warunkiem zajścia zdarzenia H. Jest więc na przykład prawdopodobieństwem, że owoc jest okrągły i czerwony, jeśli wiadomo, że jest jabłkiem.

P(X) jest prawdopodobieństwem bezwarunkowym. Jest więc na przykład prawdopodobieństwem tego, że obserwowany (wybrany losowo) owoc jest czerwony i okrąg

W klasyfikacji Bayesa maksymalizujemy: $P(C_i \mid X) = \frac{P(X \mid C_i) P(C_i)}{P(X)}$

Ponieważ P(X) jest stałe, więc wystarczy maksymalizować iloczynP(X|Ci)P(Ci).

Ponadto przyjmujemy:P(Ci) = si/ s, gdzie s oznacza liczbę obiektów w zbiorze treningowym, a si oznacza liczbę obiektów w klasie Ci.

Dla X = (x1, x2, ..., xn), wartość P(X|Ci) obliczamy jako iloczyn:P(X|Ci) = P(x1|Ci)*P(x2|Ci)* ... *P(xn|Ci),przy czym:P(xk|Ci) = sik / si, gdzie sik oznacza liczbę obiektów klasy Ci, dla których wartość atrybutu Ak jest równa xk, a si oznacza liczbę wszystkich obiektów klasy Ci w zadanym zbiorze treningowym.

Należy obliczyć, dla jakiej wartości i, i =1, 2, iloczyn P(X|Ci)*P(Ci),osiąga maksimum.

P(Ci) oznacza prawdopodobieństwo bezwarunkowe przynależności obiektu do klasy (inaczej: prawdopodobieństwo klasy) Ci , i = 1, 2.

Ze zbioru treningowego obliczamy:

P(C1) = 9/14 = 0.643

P(C2) = 5/14 = 0.357

Prawdopodobieństwa warunkowe P(X|Ci) są odpowiednio równe iloczynom prawdopodobieństw warunkowych:

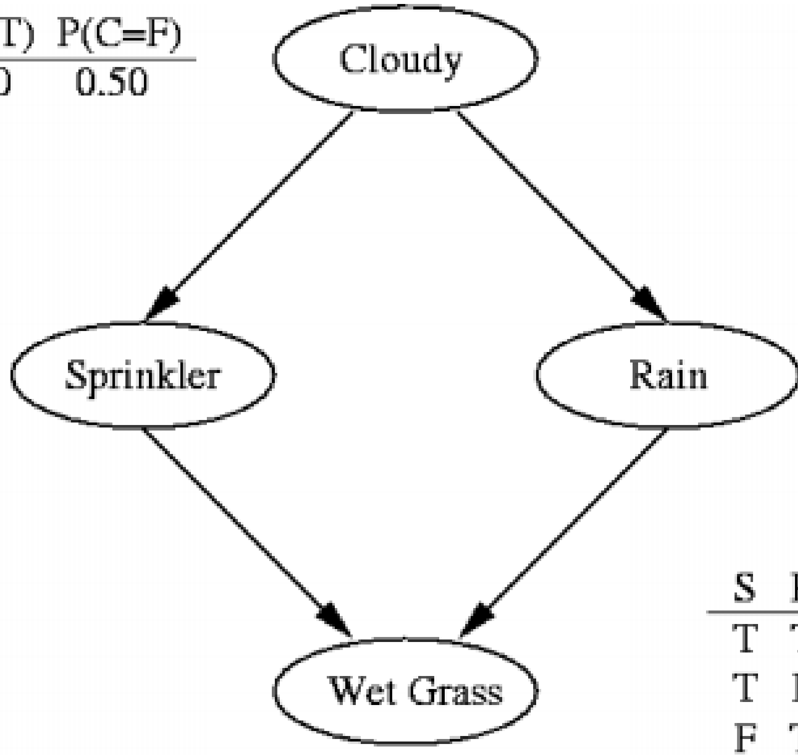
P(X|C1) = P(Wiek=„<=30”|C1) * P(Dochód=„średni”|C1)*

P(Studia=„tak”|C1) * P(OcenaKred=„dobra”|C1),

P(X|C2) = P(Wiek=„<=30”|C2) * P(Dochód=„średni”|C2)*

P(Studia=„tak”|C2) * P(OcenaKred=„dobra”|C2), Celem propagacji niepewności w sieciach bayesowskich jest obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego pewnej zmiennej (zwykle oznaczającej hipotezę: diagnozę czy prognozę) względem zadanych wartości innych zmiennych (zwykle obserwacji, symptomów).

P(C=T)	P(C=F)
0.50	0.50



C	P(S=T)	P(S=F)
T	0.10	0.90
F	0.50	0.50

C	P(R=T)	P(R=F)
T	0.80	0.20
F	0.20	0.80

S	R	P(W=T)	P(W=F)
T	T	0.99	0.01
T	F	0.90	0.10
F	T	0.90	0.10
F	F	0.00	1.00

Figure 9: Another Bayesian network example. The event that the grass being wet (W = true) has two possible causes: either the water sprinkler was on (S = true) or it rained (R = true). (Russell and Norvig, Artificial Intelligence: A Modern Approach, 1995)

Zaobserwowano mokrą trawę. Mogą być tego 2 przyczyny: padający deszcz bądź działania zraszacza. Która z nich jest bardziej prawdopodobna ?

$$P(S|W) = \frac{P(S,W)}{P(W)} = \frac{0.2781}{0.6471} = 0.430$$

$$P(R|W) = \frac{P(R,W)}{P(W)} = \frac{0.4581}{0.6471} = 0.708$$

Jak widać, bardziej prawdopodobnym jest, że trawa jest mokro po tym jak padał deszcz.

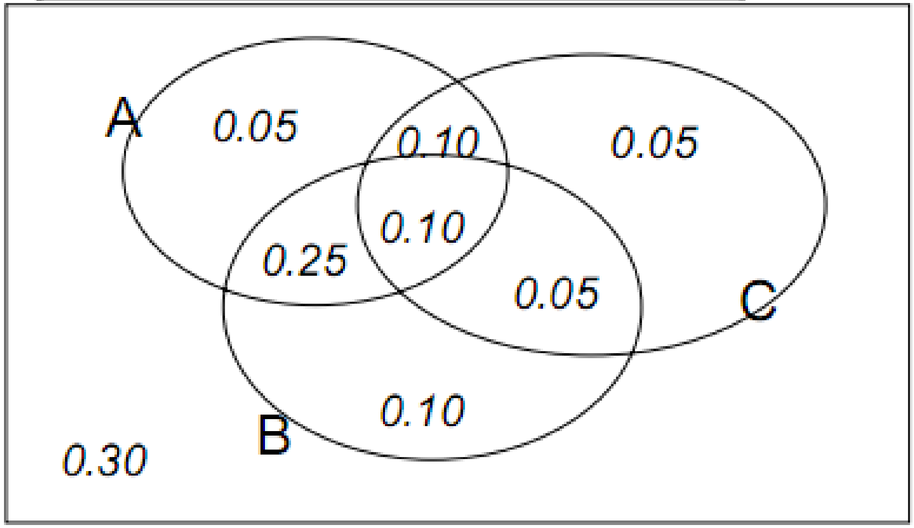
Wiadomo, że jeśli mamy **m** zmiennych, to występuje dokładnie **2^m** możliwych przypadków do rozważenia.

Example: Boolean variables A, B, C

A	**B**	**C**	**Prob**
0	0	0	0.30
0	0	1	0.05
0	1	0	0.10
0	1	1	0.05
1	0	0	0.05
1	0	1	0.10
1	1	0	0.25
1	1	1	0.10

Example: Boolean variables A, B, C

A	B	C	Prob
0	0	0	0.30
0	0	1	0.05
0	1	0	0.10
0	1	1	0.05
1	0	0	0.05
1	0	1	0.10
1	1	0	0.25
1	1	1	0.10



gender	hours_worked	wealth	
Female	v0:40.5-	poor	0.253122
		rich	0.0245895
	v1:40.5+	poor	0.0421768
		rich	0.0116293
Male	v0:40.5-	poor	0.331313
		rich	0.0971295
	v1:40.5+	poor	0.134106
		rich	0.105933

$$P(E) = \sum_{\text{rows matching } E} P(\text{row})$$

P(Poor Male) = 0.4654

gender	hours_worked	wealth		
Female	v0:40.5-	poor	0.253122	
		rich	0.0245895	
	v1:40.5+	poor	0.0421768	
		rich	0.0116293	
Male	v0:40.5-	poor	0.331313	
		rich	0.0971295	
	v1:40.5+	poor	0.134106	
		rich	0.105933	

$$P(E) = \sum_{\text{rows matching } E} P(\text{row})$$

$P(\text{Poor}) = 0.7604$

gender	hours_worked	wealth		
Female	v0:40.5-	poor	0.253122	
		rich	0.0245895	
	v1:40.5+	poor	0.0421768	
		rich	0.0116293	
Male	v0:40.5-	poor	0.331313	
		rich	0.0971295	
	v1:40.5+	poor	0.134106	
		rich	0.105933	

$$P(E) = \sum_{\text{rows matching } E} P(\text{row})$$

Wnioskowanie

gender	hours_worked	wealth		
Female	v0:40.5-	poor	0.253122	
		rich	0.0245895	
	v1:40.5+	poor	0.0421768	
		rich	0.0116293	
Male	v0:40.5-	poor	0.331313	
		rich	0.0971295	
	v1:40.5+	poor	0.134106	
		rich	0.105933	

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_2)} = \frac{\sum_{\text{rows matching } E_1 \text{ and } E_2} P(\text{row})}{\sum_{\text{rows matching } E_2} P(\text{row})}$$

P(Male | Poor) = 0.4654 / 0.7604 = 0.612

gender	hours_worked	wealth	
Female	v0:40.5-	poor	0.253122
		rich	0.0245895
	v1:40.5+	poor	0.0421768
		rich	0.0116293
Male	v0:40.5-	poor	0.331313
		rich	0.0971295
	v1:40.5+	poor	0.134106
		rich	0.105933

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_2)} = \frac{\sum_{\text{rows matching } E_1 \text{ and } E_2} P(\text{row})}{\sum_{\text{rows matching } E_2} P(\text{row})}$$

Przykład wnioskowania od początku do końca…

W pewnej klinice 15 % pacjentów stwierdzono obecność wirusa HIV. Załóżmy, że wykonano badanie krwi. Jeśli pacjent ma wirusa HTV to na 95 % test krwi wyjdzie pozytywny. Jeśli pacjent nie ma wirusa HIV to test krwi wyjdzie pozytywny jedynie z prawdopodobieństwem równym 0.02. Jeśli więc wiemy, że test wyszedł pozytywnie to jakie są prawdopodobieństwa, że pacjent:

a) Ma wirus HIV ?
b) Nie ma wirusa HIV ?

Jeśli test wyszedł negatywnie jakie są prawdopodobieństwa, że pacjent:

a) Ma wirus HIV ?
b) Nie ma wirusa HIV ?

Jeśli założymy, że:

H = zdarzenie polegające na tym, że pacjent ma wirusa HIV

P = zdarzenie polegające na tym, że wynik testu krwi wyszedł pozytywnie

Wówczas:

$P(H) = 0.15$

$P(P|H) = 0.95$

$P(P|\sim H) = 0.02$

Teraz pozostaje nam ustalić wartości następujących prawdopodobieństw:

a) $P(H \mid P)$

b) $P(\sim H|P)$

c) $P(H|\sim P)$

d) $P(\sim H|\sim P)$

Aby je wyznaczyć potrzebujemy skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe Bayesa:

$$P(H \mid P) = \frac{P(P \mid H)P(H)}{P(P)}$$

Mamy dwie wartości z prawej strony ***P(P|H)*** i ***P(H)*** *ale nie mamy wartości* ***P(P)*** – a więc prawdopodobieństwa, że test wyszedł pozytywnie. Musimy je ustalić.

Są 2 drogi do stwierdzenia, że pacjent ma pozytywny wynik testu krwi:

Ma wirusa i wtedy ma test pozytywny test krwi: **H∧P**

Nie ma wirusa a mimo to test krwi wyszedł pozytywnie: **~H∧P**

Musimy teraz ustalić wartości tych prawdopodobieństw i dodać je do siebie:

$$P(P) = P(H \wedge P) + P(\overline{H} \wedge P)$$

Wówczas mamy:

$$P(H \wedge P) = P(P \mid H)P(H)$$

oraz

$$P(\overline{H} \wedge P) = P(P \mid \overline{H})P(\overline{H})$$

Skoro wiadomo, że wartość **P(P)** wyliczymy jako sumę:

$$P(P) = P(P \mid H)P(H) + P(P \mid \overline{H})P(\overline{H})$$

To podstawiając wartości do wzoru otrzymamy:

= 0.95 × 0.15 + 0.02 × 0.85 = 0.1595

Możemy to teraz podstawić do wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe by uzyskać **P(H|P)**:

$$P(H \mid P) = \frac{(P \mid H)P(H)}{(P \mid H)P(H) + P(P \mid \overline{H})P(\overline{H})}$$

= 0.95 × 0.15 / 0.1595 = 0.8934

Aby więc odpowiedzieć sobie na pytanie o wartość prawdopodobieństwa zdarzenia **P(~H|P)** wystarczy obliczyć go jako dopełnienie do wartości 1 dla prawdopodobieństwa wyliczonego wyżej.

$$P(\overline{H} \mid P) = 1 - P(H \mid P)$$ = 1 – 0.8934 = 0.1066

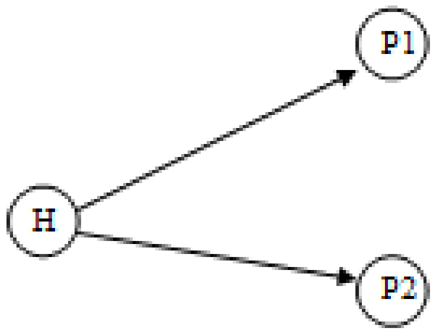
Teraz by wyznaczyć wartość dla **P(H|~P)** podstawiamy go do wzoru na prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P(H \mid \overline{P}) = \frac{P(\overline{P} \mid H)P(H)}{P(\overline{P})}$$

P(H|~P)= (0.05 × 0.15)/(1-0.1595) = 0.008923

1 – P(H|~P)= 1- 0.008923 = 0.99107

Rozważmy teraz zdarzenie **H** powodujące zdarzenia ***P1*** i ***P2***. Taki diagram możemy nazwać siecią bayesowską. Przypuśćmy, że oba zdarzenia ***P1*** i ***P2*** są pozytywne. Chcemy wyznaczyć prawdopodobieństwa zdarzeń, że pacjenci mają wirusa. Innymi słowy, chcemy znaleźć wartość prawdopodobieństwa:



$$P(H \mid P1 \wedge P2)$$

Zatem możemy wyznaczyć prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(H \mid P1 \wedge P2) = \frac{P(P1 \wedge P2 \mid H)P(H)}{P(P1 \wedge P2)}$$

Mamy więc dwa obliczenia, których na razie nie znamy:**P(P1^P2|H)** i **P(P1 ^ P2).**

W celu wyznaczenia **P(P1^P2|H)** potrzebujemy wiedzieć na pewno, że dwa testy są niezależne. Ponieważ wiemy, że tak jest możemy zapisać, że:

P(P1^P2|H) = (P1|H)P(P2|H)

Teraz musimy znaleźć wartość **$P(P1 \wedge P2)$.** Tak jak poprzednio musimy rozważyć teraz dwa przypadki gdy wyznaczamy **$P(P)$**:

- Pacjent ma wirusa i oba testy wypadły pozytywnie,
- Pacjent nie ma wirusa i oba testy wyszły pozytywnie.

Tak jak poprzednio potrzebujemy użyć drugiego aksjomatu prawdopodobieństwa.

$$P(P1 \wedge P2) = P(P1 \wedge P2 \mid H)P(H) + P(P1 \wedge P2 \mid \overline{H})P(\overline{H})$$

Widzimy, że oba testy są niezależne dając H, wiec zapiszemy to jako:

$$P(P1 \wedge P2) = P(P1 \mid H)P(P2 \mid H)P(H) + P(P1 \mid \overline{H})P(P2 \mid \overline{H})P(\overline{H})$$

$$= 0.95 \times 0.95 \times 0.15 + 0.02 \times 0.02 \times 0.85 = 0.135715$$

Podstawiając wartości do wzoru na prawdopodobieństwo Bayesa otrzymamy:

$$P(H \mid P1 \wedge P2) = \frac{0.95 \times 0.95 \times 0.15}{0.135715} = 0.99749$$

Poprzednio obliczyliśmy prawdopodobieństwo zdarzenia, że pacjent ma wirusa HIV na podstawie jednego testu pozytywnego, i wynosiło ono 0.8934. Teraz po przeprowadzeniu dwóch testów – prawdopodobieństwo wzrasta do wartości 0.99749. Więc po dwóch testach możemy być bardziej pewni co do tego, że pacjent ma wirusa HIV.

Należy jeszcze rozważyć przypadek gdy jeden test będzie pozytywny a drugi negatywny. Oczywiście będzie to oznaka błędu w jednym z testów, ale przecież nie wiemy w którym. Czy jednak możemy coś powiedzieć o tym, czy pacjent ma wirus czy nie ? Musimy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

$$P(H \mid P1 \wedge \overline{P2})$$

Możemy to zrobić postępując tak samo jak w przypadku dwóch testów pozytywnych. Twierdzenie Bayesa będzie wyglądać następująco:

$$P(H \mid P1 \wedge \overline{P2}) = \frac{P(P1 \wedge \overline{P2} \mid H)P(H)}{P(P1 \wedge \overline{P2})}$$

Teraz wystarczy wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzeń:

$$P(P1 \wedge \overline{P2} \mid H) \quad \text{oraz} \quad P(P1 \wedge \overline{P2})$$

Podobnie jak poprzednio możemy wykorzystać fakt, że zdarzenia **P1** i **P2** są niezależne dla zdarzenia H:

$$P(P1 \wedge \overline{P2}) = P(P1 \wedge \overline{P2} \mid H)P(H) + P(P1 \wedge \overline{P2} \mid \overline{H})P(\overline{H})$$

$$= P(P1 \mid H)P(\overline{P2} \mid H)P(H) + P(P1 \mid \overline{H})P(\overline{P2} \mid \overline{H})P(\overline{H})$$

co po podstawieniu odpowiednich wartości daje:

$$= 0.95 \times 0.05 \times 0.15 + 0.02 \times 0.98 \times 0.85 = 0.023785$$

Możemy podstawić tę wartość do wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe by uzyskać:

$$P(H \mid P1 \wedge \overline{P2}) = \frac{0.95 \times 0.05 \times 0.15}{0.023785} = 0.299$$

Zauważmy, że nasza wiara w zdarzenie **H** wzrosła. Na początku było to tylko 15 % a teraz jest to już 29,9%. Prawdopodobieństwo pozytywnego testu gdy pacjent nie jest chory na wirus HIV jest niewielkie (0.02).Prawdopodobieństwo pozytywnego testu gdy pacjent jest chory na HIV jest równe 0.05. Przez to jesteśmy bardziej skłonni uwierzyć w błąd w 2 teście i to znacznie zwiększa wiarę, że pacjent jest chory na HIV.

Genie & Smile

SMILE Zestaw klas C++ implementujących różne modele decyzyjne w oparciu o analizę probabilistyczną. Wśród nich sieci Bayesa, modele równań strukturalnych. SMILE doskonałe sprawdzi się w roli engine'u dla różnego rodzaju aplikacji, których celem jest tworzenia graficznej reprezentacji model probabilistycznego. Biblioteka została zaprojektowana w ten sposób, iż może być wykorzystana w kodzie C poprzez wywołania funkcji. Co więcej, istnieje również wersja przeznaczona dla platformy .NET.

Platforma: Macintosh, Linux, Solaris, Windows

Licencja: Decision Systems Laboratory, University of Pittsburgh License

http://www.sis.pitt.edu/~genie/smile/smile.htm

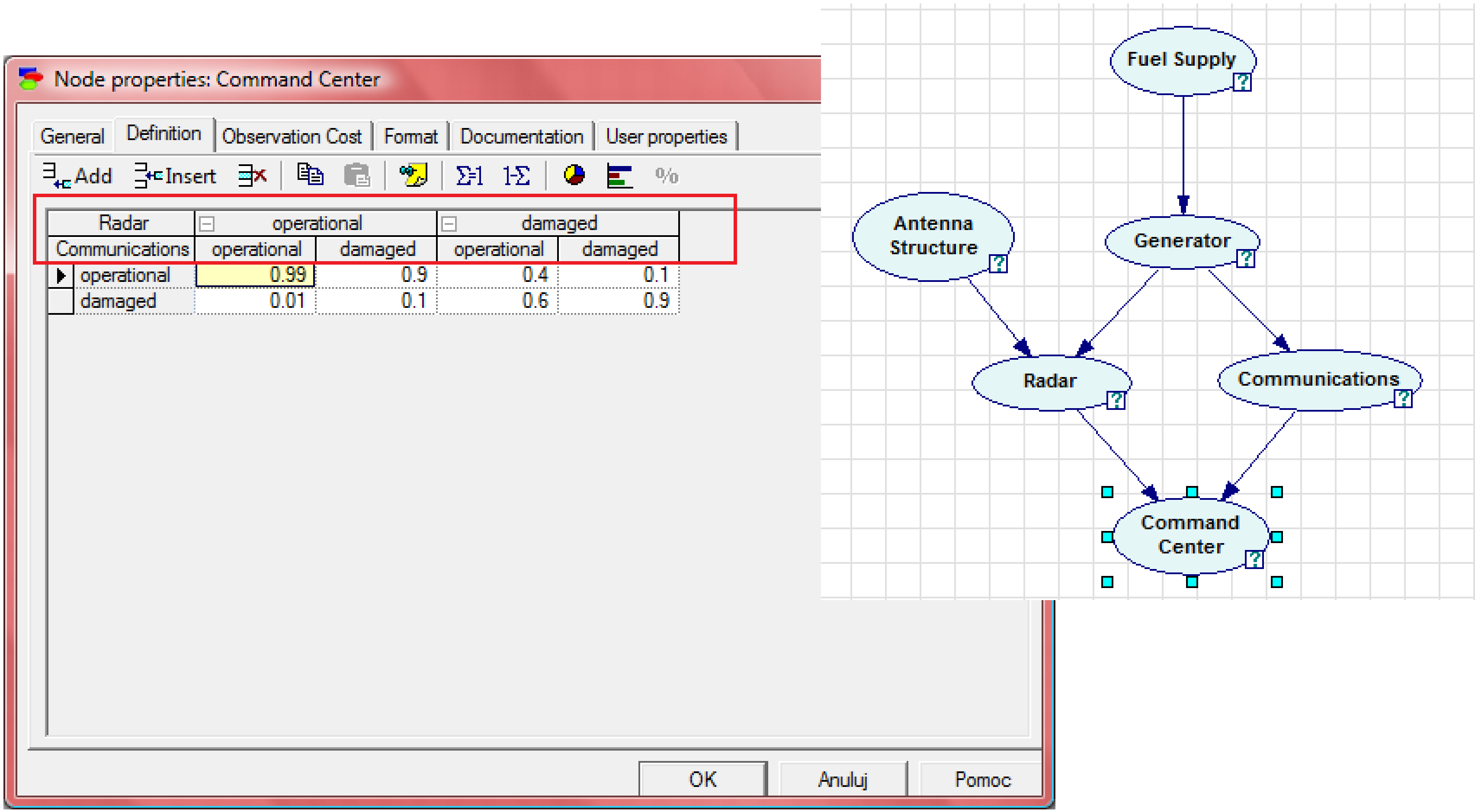
GeNIe 2 GeNIe stanowi komplementarny element dla SMILE. Jest graficzną nakładką dla tej biblioteki. Z uwagi na to, że twórcy SMILE rozwijali również GeNIe, można być pewnym bezproblemowej współpracy. Za sprawą wbudowanego edytora modeli GeNIe pozwala na swobodną modyfikację modeli probabilistycznych. Możliwa jest także wymiana danych z innymi aplikacjami (Excel).

Platforma: Windows

Licencja: Decision Systems Laboratory, University of Pittsburgh License

http://www.sis.pitt.edu/~genie/genie/genie.htm

Przedstawione na grafie zależności są modelowane przez przedstawione liczbowo prawdopodobieństwo wyrażające siłę, z jaką oddziałują na siebie zmienne. Prawdopodobieństwo jest kodowane w tabelach dołączanych do każdego węzła i indeksowanych przez węzły nadrzędne. Górne wiersze tabeli przedstawiają wszystkie kombinacje stanów zmiennych nadrzędnych.



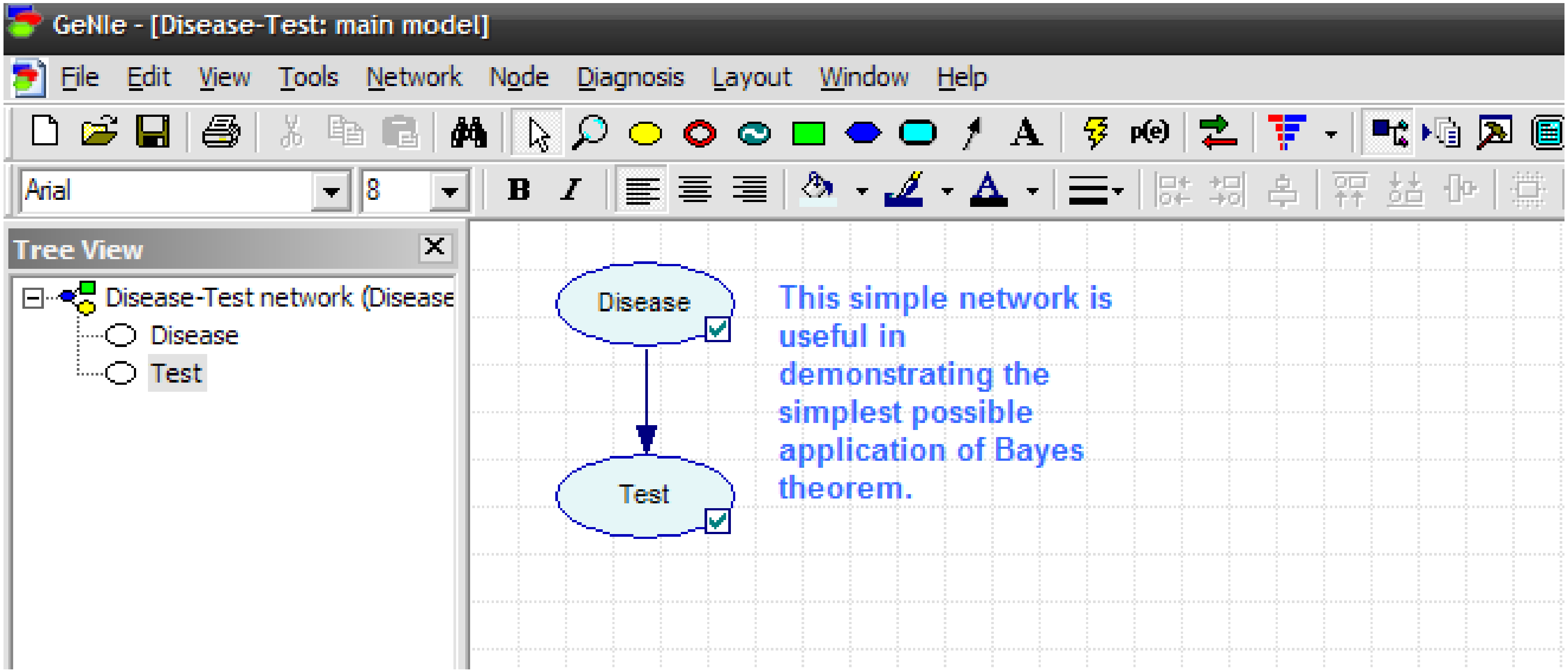
Radar	operational		damaged	
Communications	operational	damaged	operational	damaged
operational	0.99	0.9	0.4	0.1
damaged	0.01	0.1	0.6	0.9

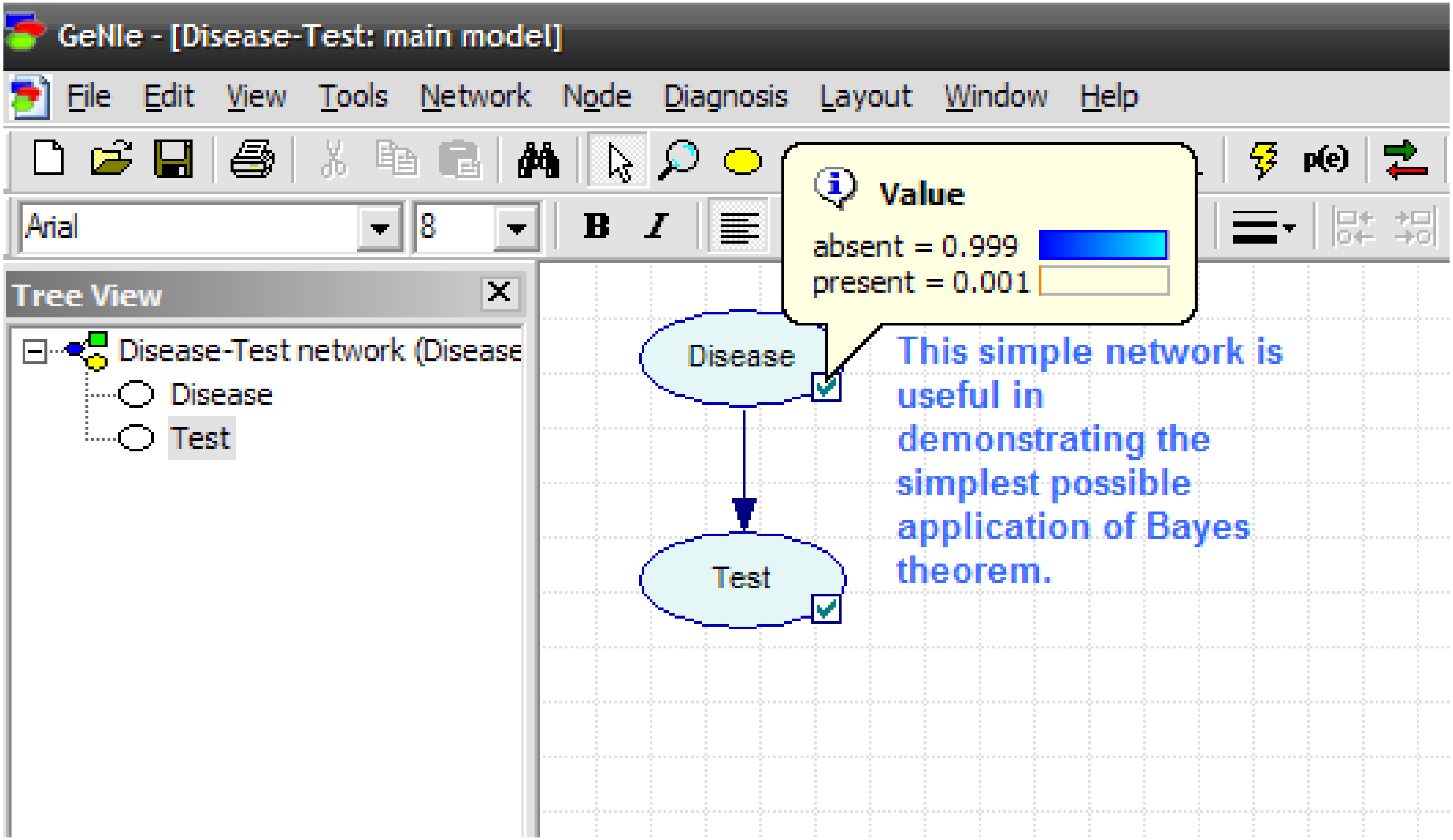
Węzły bez poprzedników są opisane głównymi prawdopodobieństwami. Węzeł „Success” będzie opisany przez rozkład prawdopodobieństw tylko jego dwóch wyników możliwych: Success i Failure.

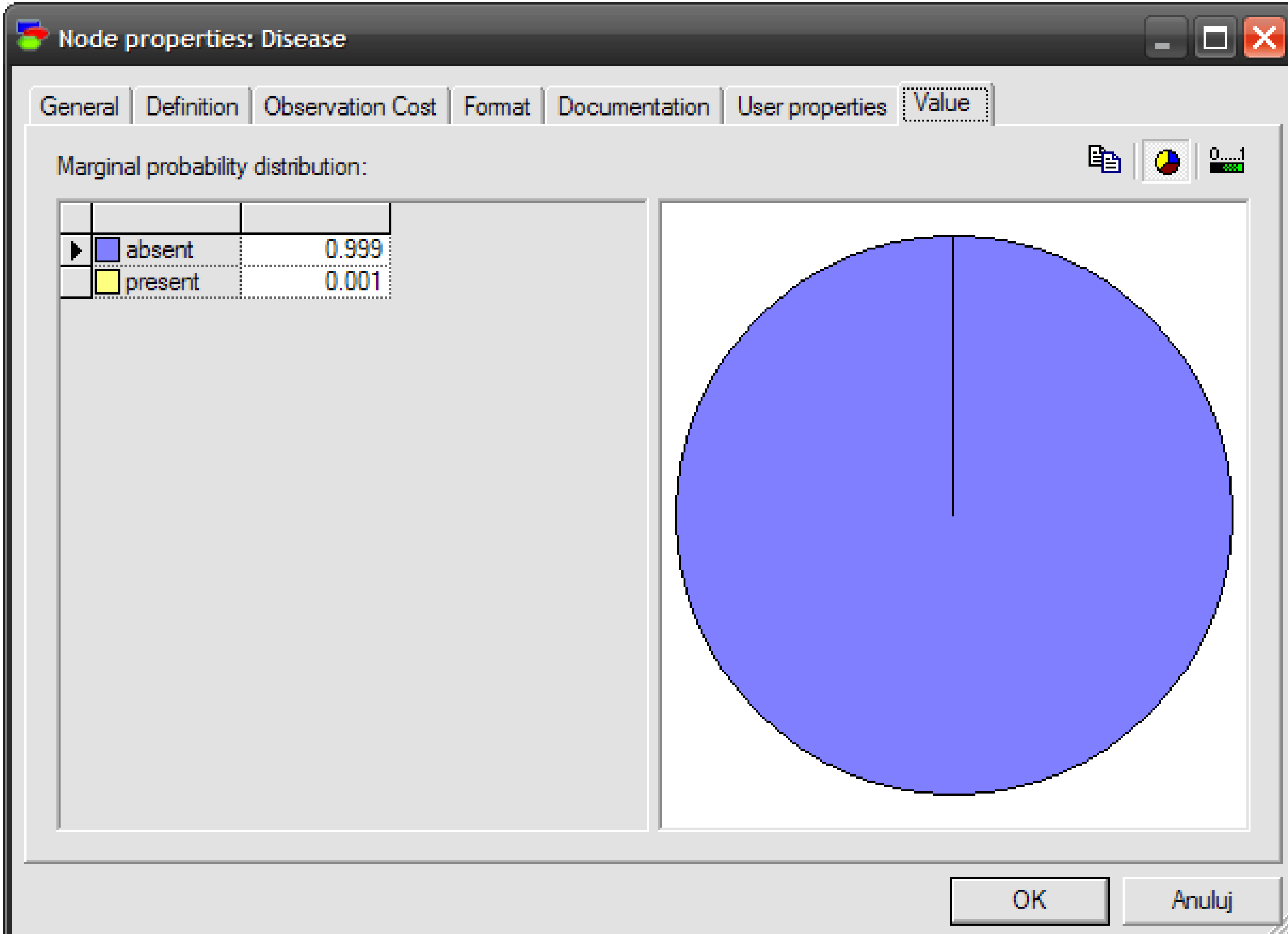
Success	0.2
Failure	0.8

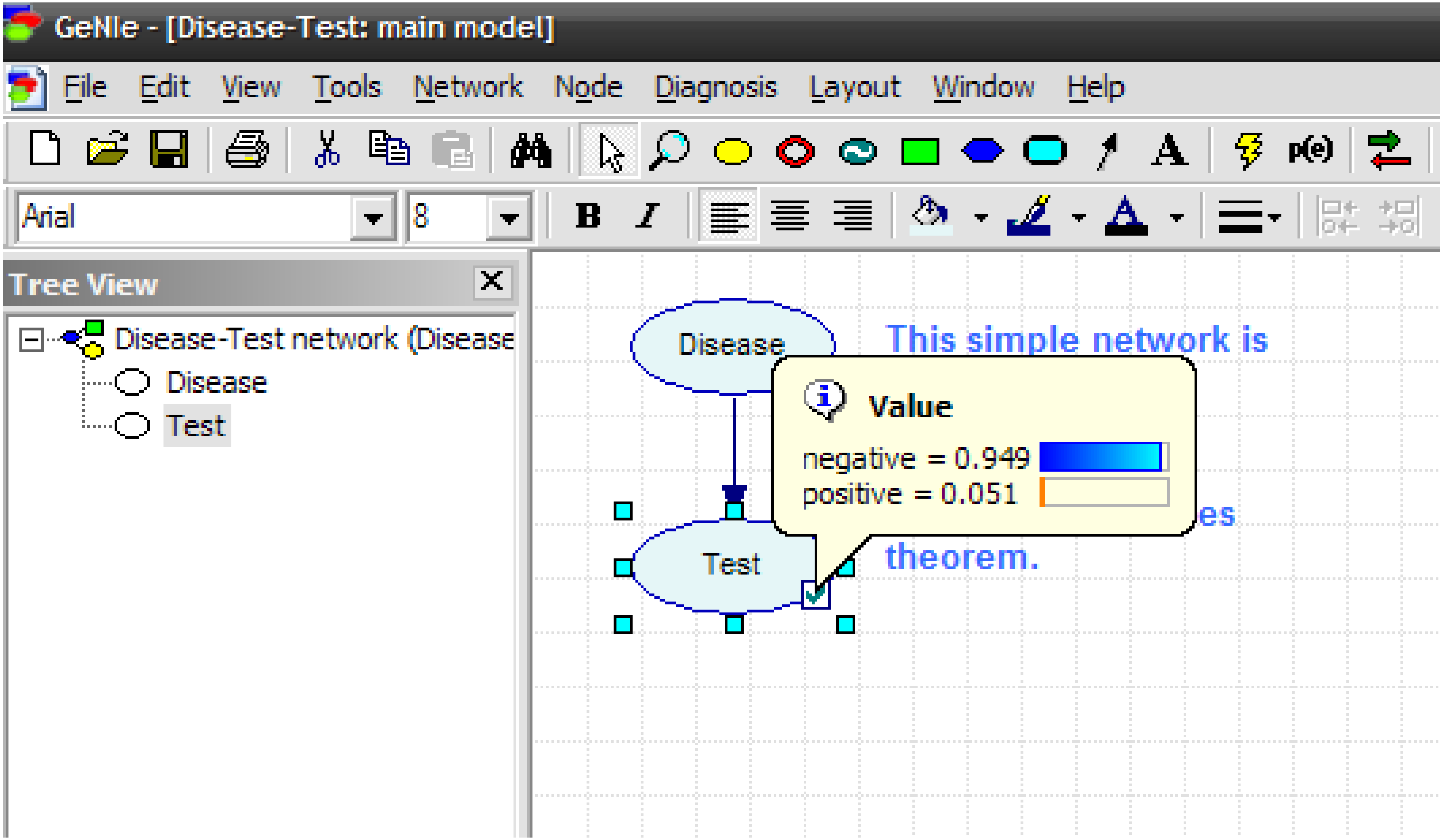
Węzeł *„Forecast” będzie natomiast opisany przez rozkład prawdopodobieństw wyjściowych wartości* (*Good*, *Moderate*, *Poor*) uwarunkowanych dodatkowo przez ich poprzedniki (węzeł *Success*, i wyjściowe wartości *Success* i *Failure*).

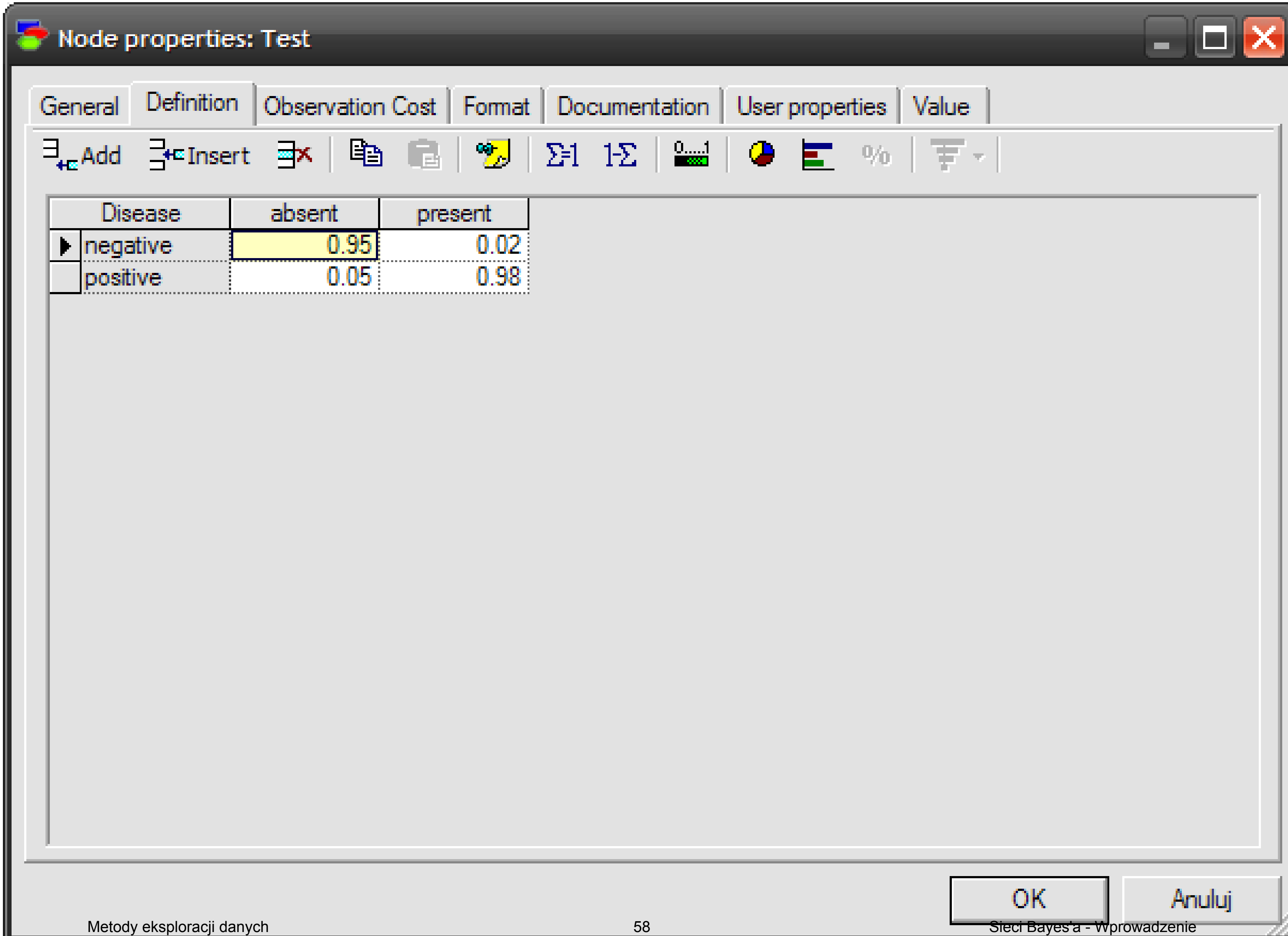
Success of the venture	Success	Failure
Good	0.4	0.1
Moderate	0.4	0.3
Poor	0.2	0.6

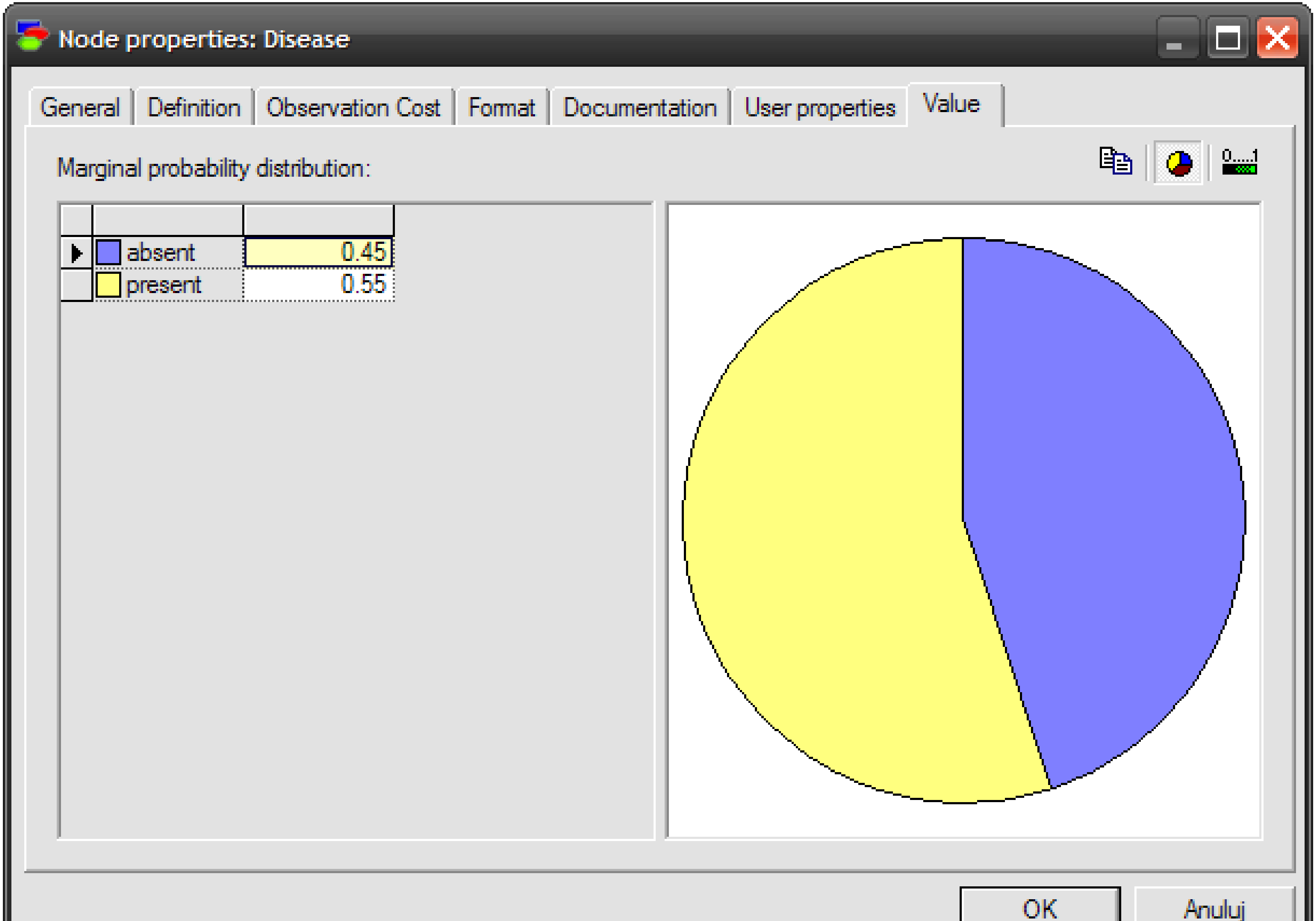

GeNIe - [Disease-Test: main model]
File Edit View Tools Network Node Diagnosis Layout Window Help
Arial
8
Tree View
Disease-Test network (Disease
Disease
Test
Disease
Test
This simple network is useful in demonstrating the simplest possible application of Bayes theorem.

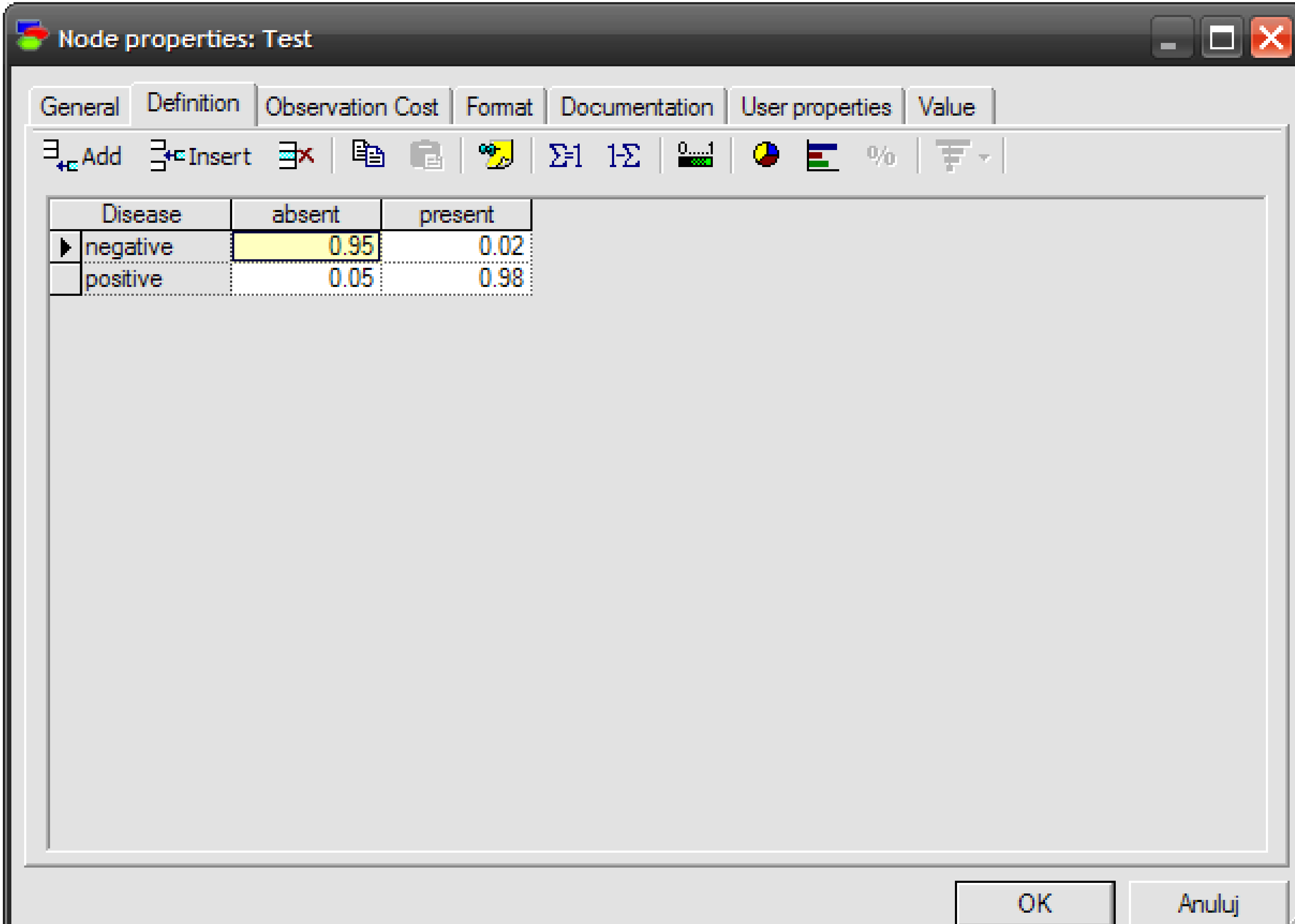

GeNIe - [Disease-Test: main model]
File Edit View Tools Network Node Diagnosis Layout Window Help
Arial
8
Tree View
Disease-Test network (Disease
Disease
Test
Value
absent = 0.999
present = 0.001
Disease
Test
This simple network is useful in demonstrating the simplest possible application of Bayes theorem.

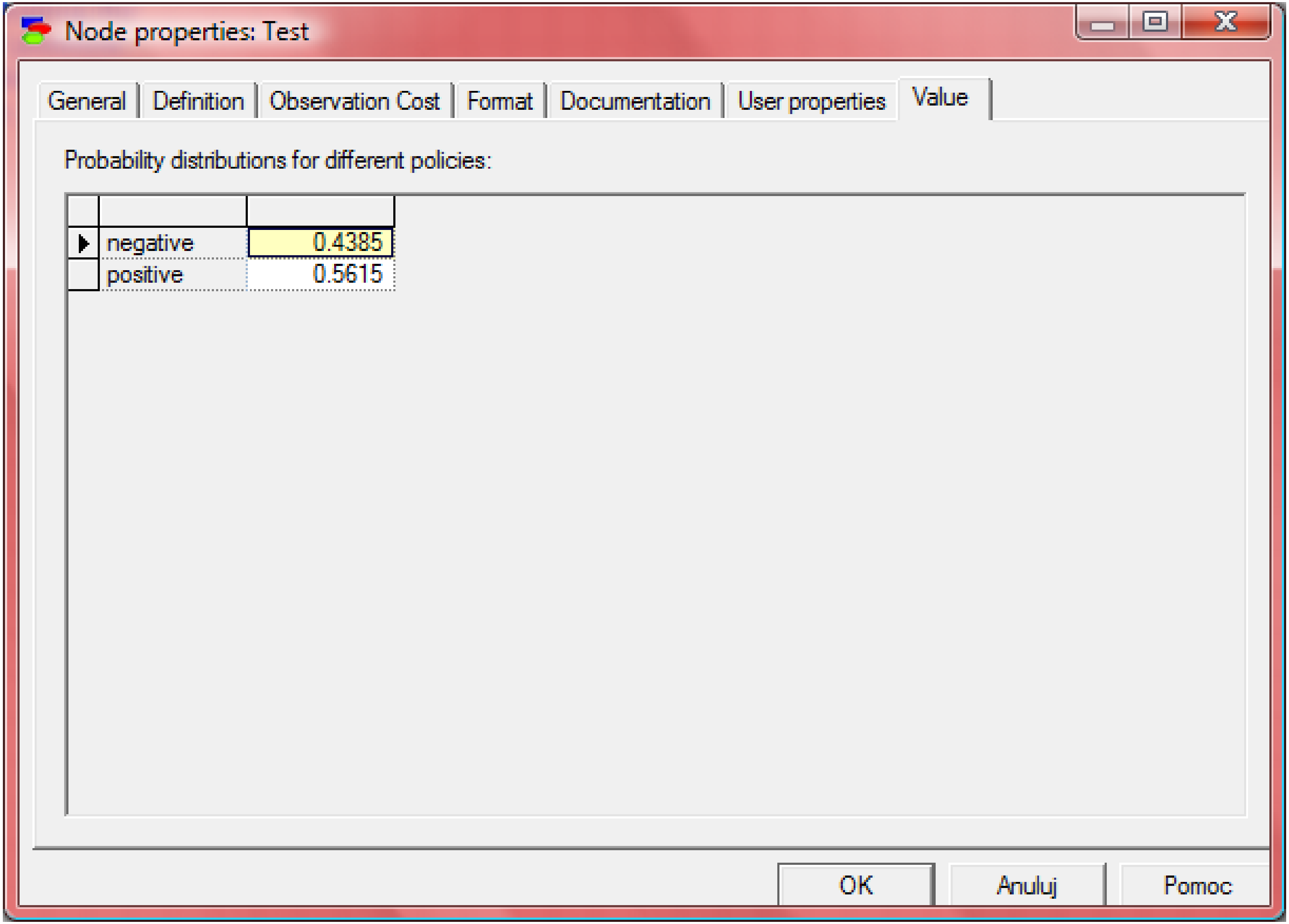

Node properties: Disease
General
Definition
Observation Cost
Format
Documentation
User properties
Value
Marginal probability distribution:
absent 0.999
present 0.001
OK
Anuluj

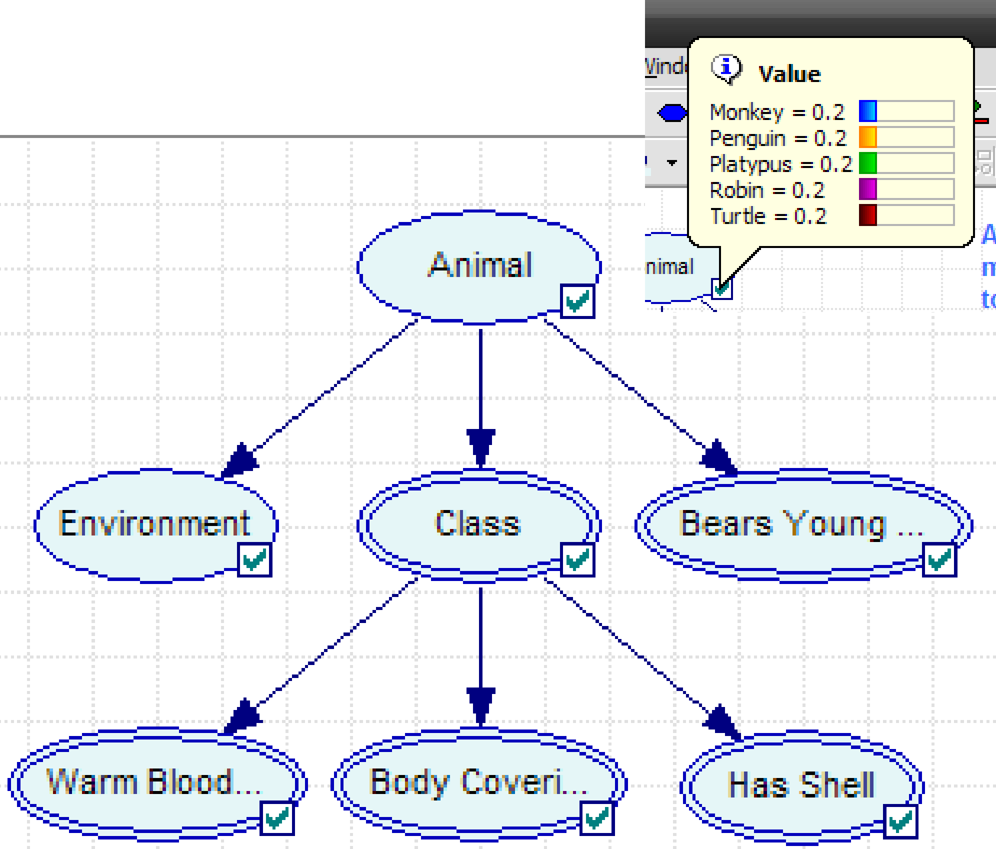

GeNIe - [Disease-Test: main model]
File
Edit
View
Tools
Network
Node
Diagnosis
Layout
Window
Help
Arial
8
Tree View
Disease-Test network (Disease
Disease
Test
Disease
This simple network is
Value
negative = 0.949
positive = 0.051
es
theorem.
Test


Node properties: Test
General
Definition
Observation Cost
Format
Documentation
User properties
Value
Add
Insert
Disease
absent
present
negative
0.95
0.02
positive
0.05
0.98
OK
Anuluj

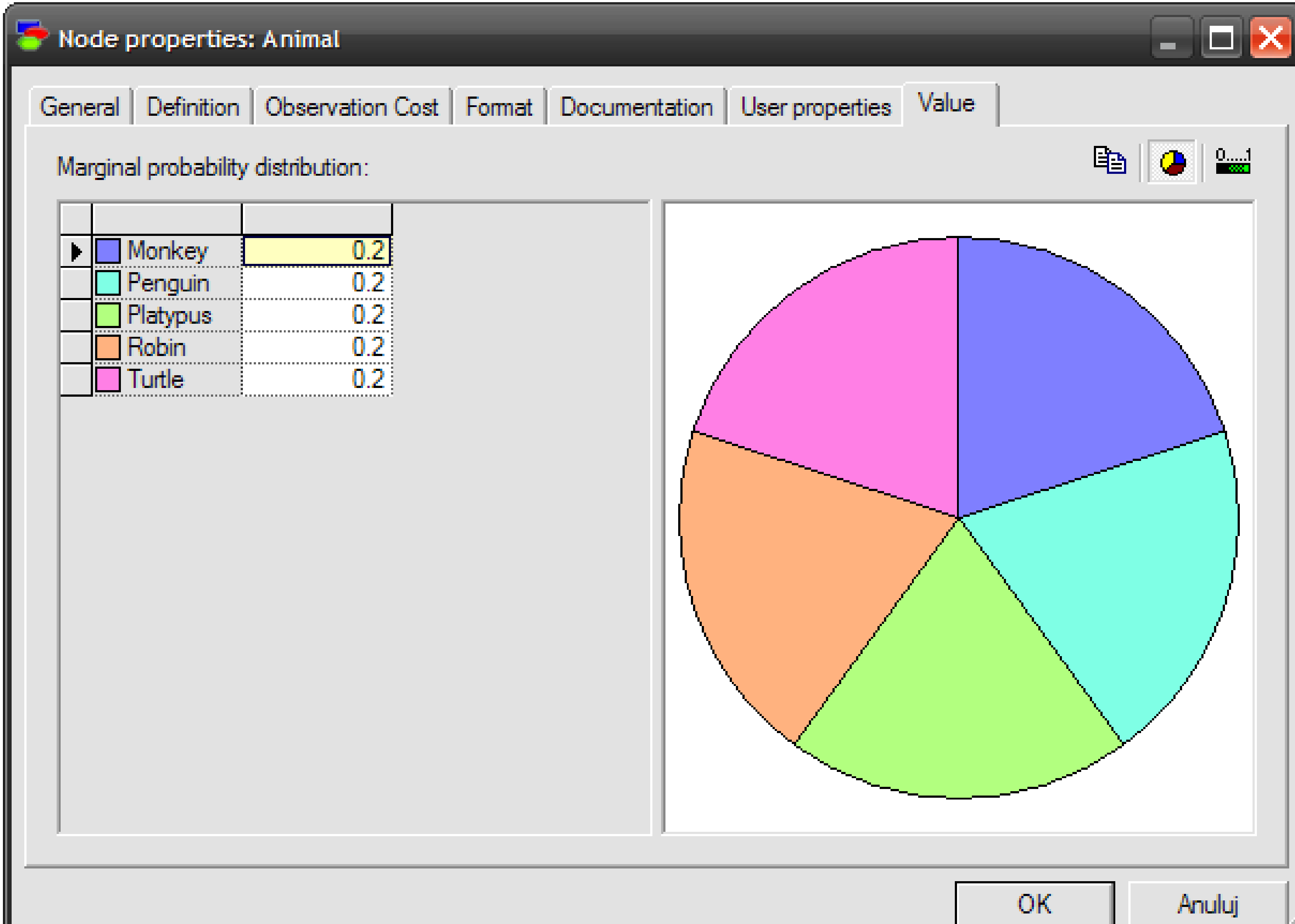

Node properties: Disease
General
Definition
Observation Cost
Format
Documentation
User properties
Value
Marginal probability distribution:
absent 0.45
present 0.55
OK
Anuluj

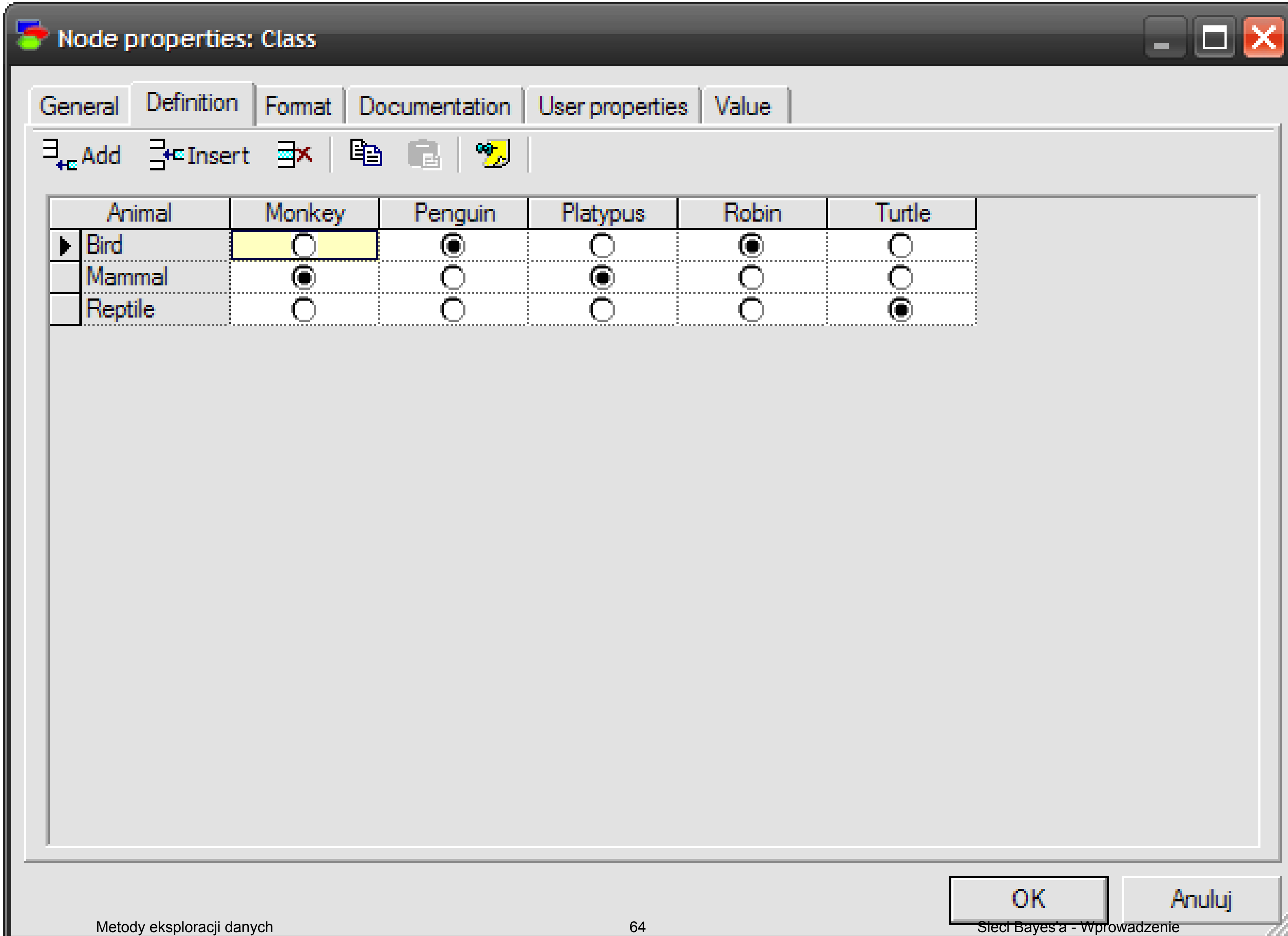

Node properties: Test
General
Definition
Observation Cost
Format
Documentation
User properties
Value
Add
Insert
Disease
absent
present
negative
0.95
0.02
positive
0.05
0.98
OK
Anuluj

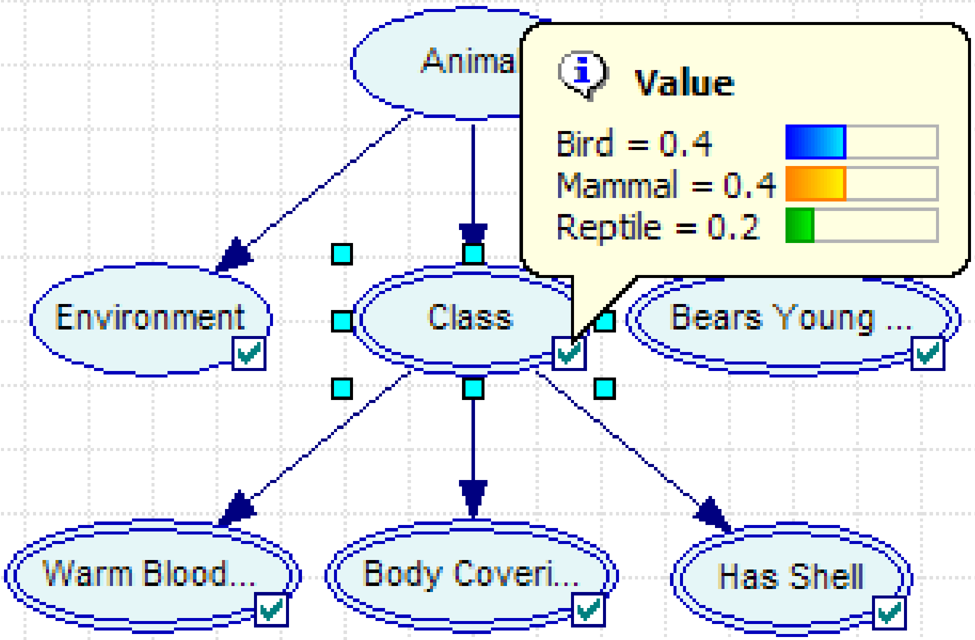

Node properties: Test
General
Definition
Observation Cost
Format
Documentation
User properties
Value
Probability distributions for different policies:
negative 0.4385
positive 0.5615
OK
Anuluj
Pomoc



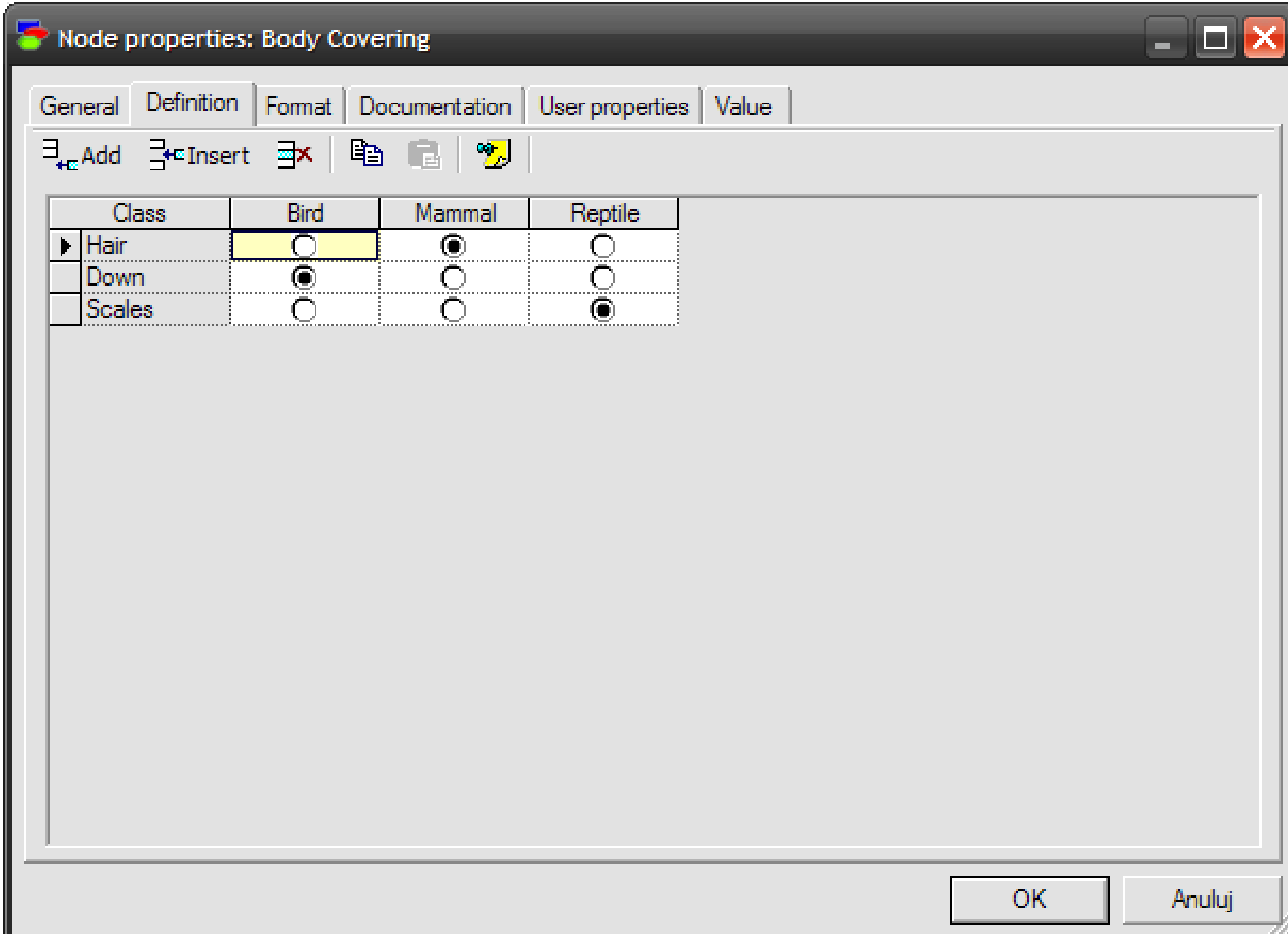
A simple animal guessing game modeled by and made available to the community by Noetic, Inc., the developers of Ergo.
The network will guess which of the five animals you have in mind, as you provide information about habitat and characteristics of the animal.
The network illustrates well the interaction between probability and propositional logic.

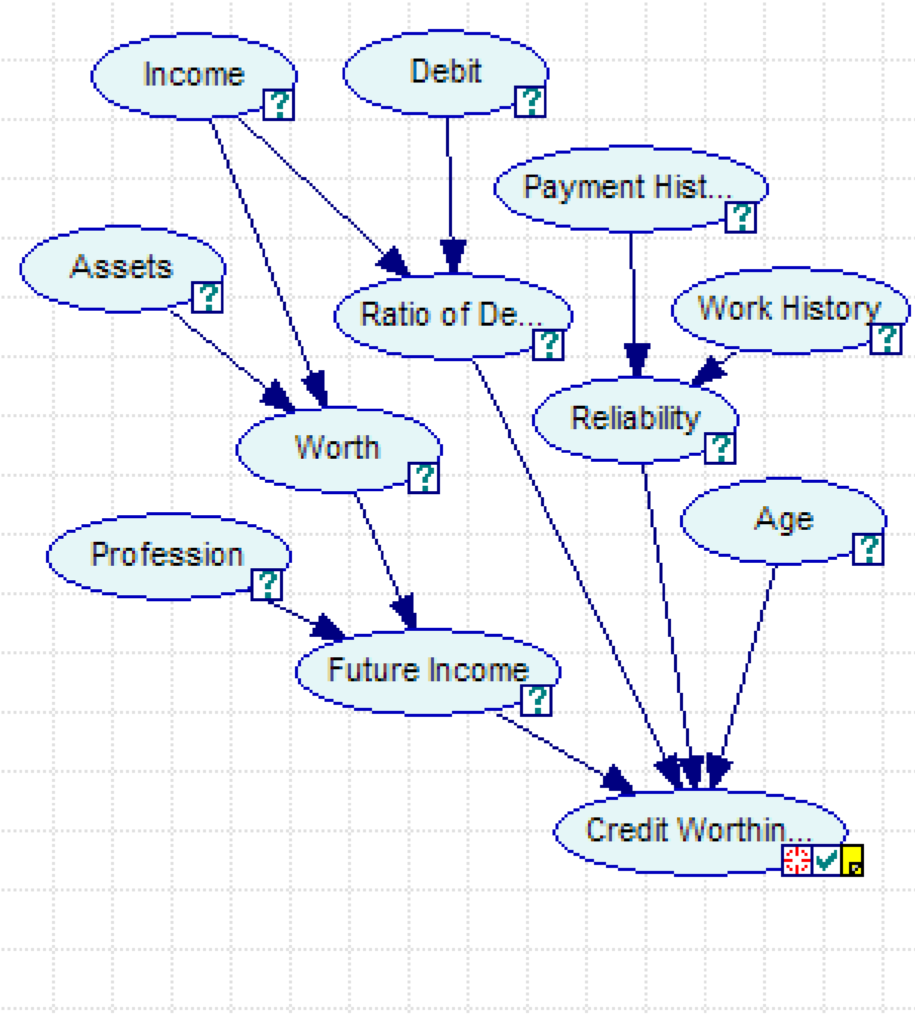

Node properties: Animal
General
Definition
Observation Cost
Format
Documentation
User properties
Value
Marginal probability distribution:
Monkey 0.2
Penguin 0.2
Platypus 0.2
Robin 0.2
Turtle 0.2
OK
Anuluj


Node properties: Class
General
Definition
Format
Documentation
User properties
Value
Add
Insert
Animal
Monkey
Penguin
Platypus
Robin
Turtle
Bird
Mammal
Reptile
OK
Anuluj

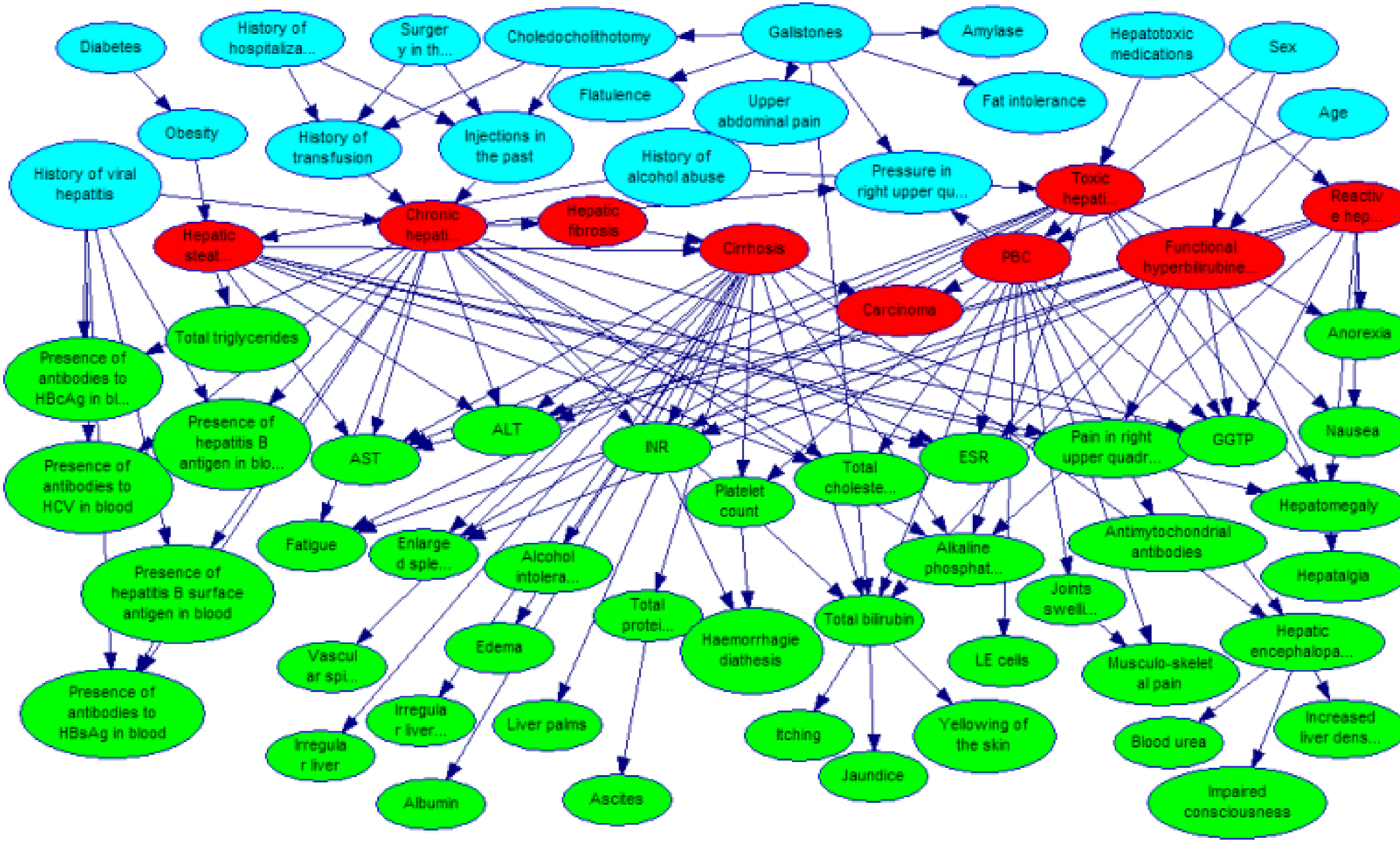


A simple animal guessing game modeled by and made available to the community by Noetic, Inc., the developers of Ergo.
The network will guess which of the five animals you have in mind, as you provide information about habitat and characteristics of the animal.
The network illustrates well the interaction between probability and propositional logic.

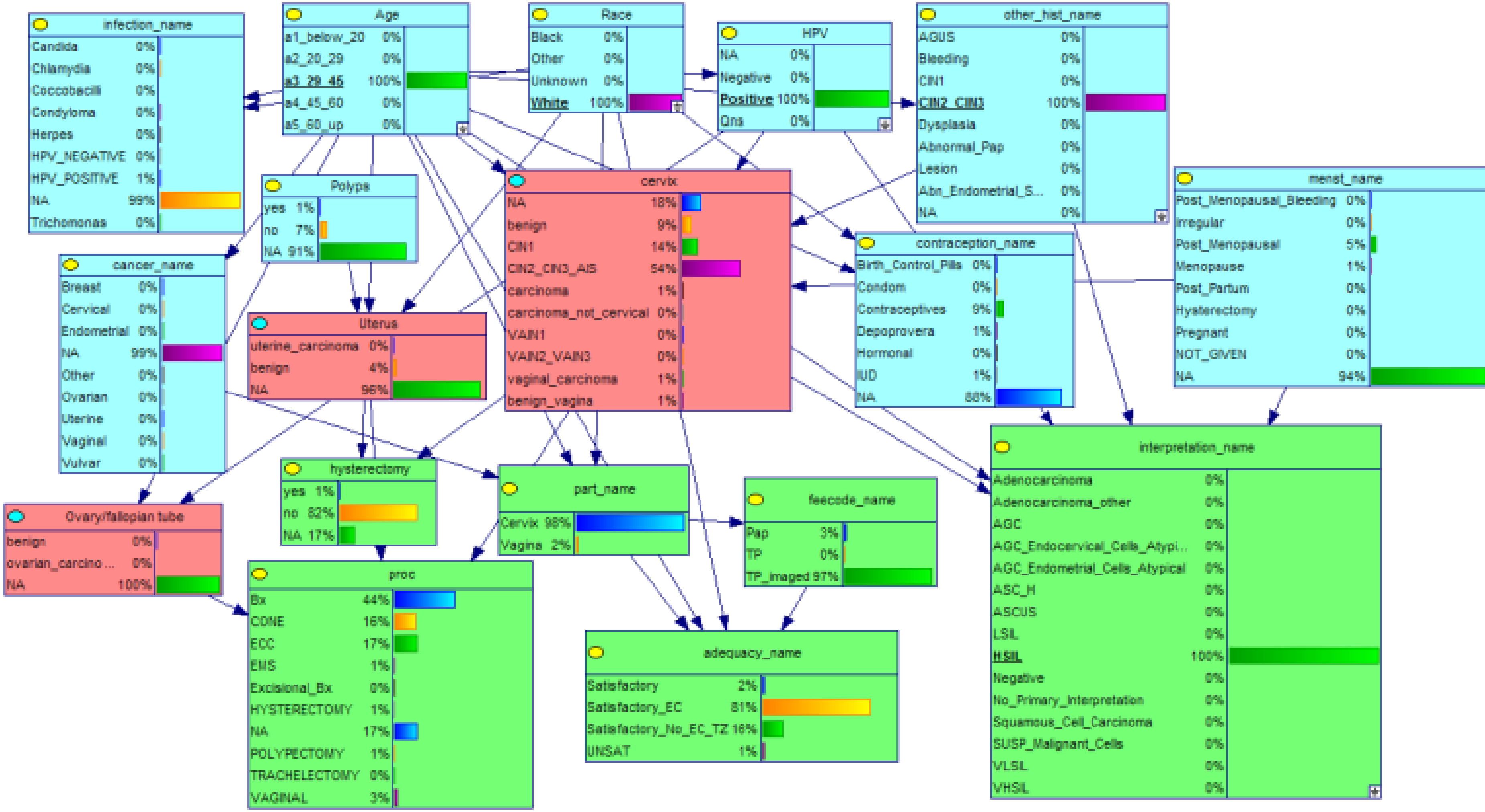

Node properties: Body Covering
General
Definition
Format
Documentation
User properties
Value
Add
Insert
Class
Bird
Mammal
Reptile
Hair
Down
Scales
OK
Anuluj



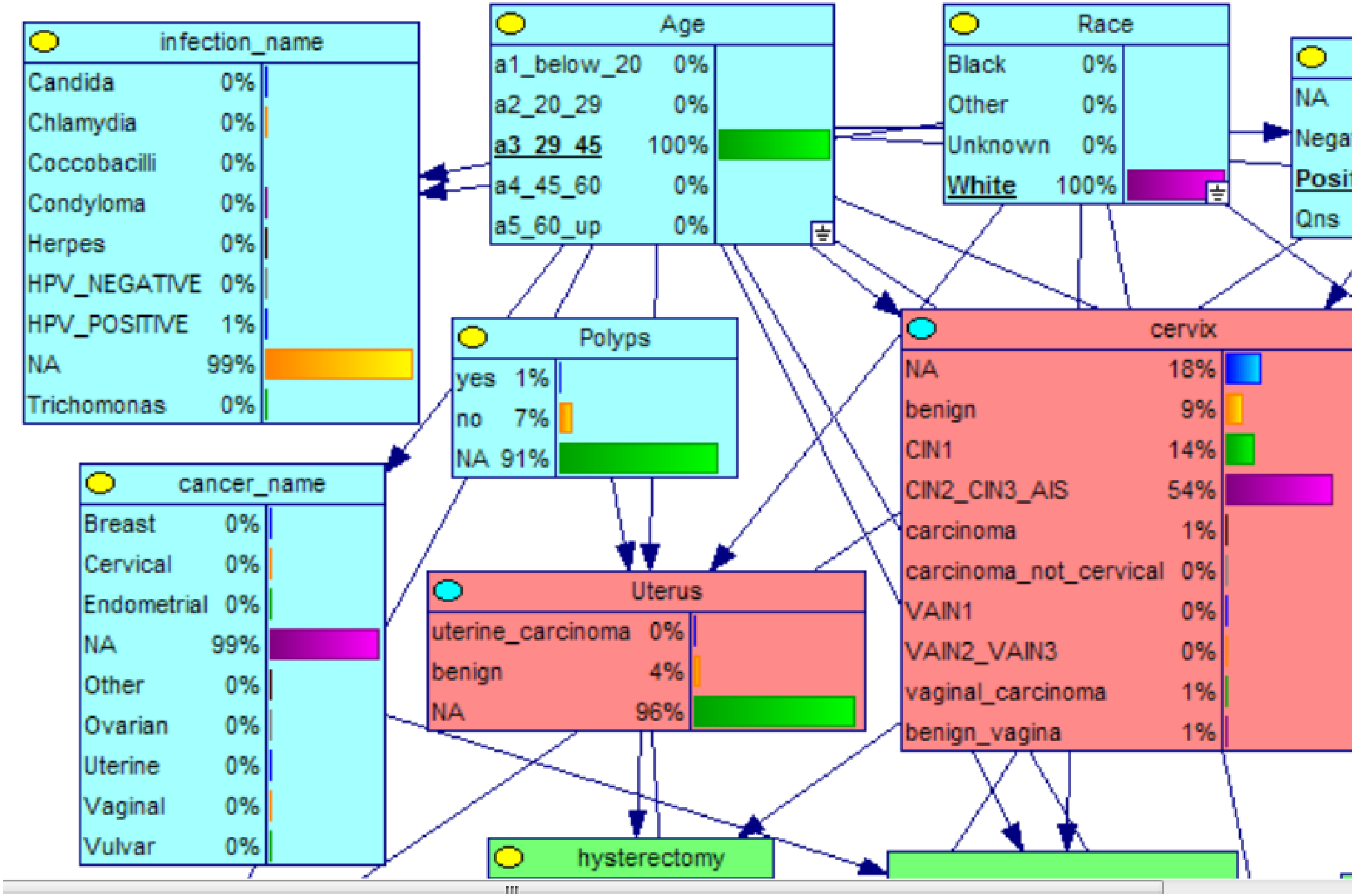
A simple network for assessing credit worthiness of an individual, developed by Gerardina Hernandez as a class homework at the University of Pittsburgh. Note that all parentless nodes are described by uniform distributions. This is a weakness of the model, although it is offset by the fact that all these nodes will usually be observed and the network will compute the probability distribution over credit worthiness correctly.
Another element of this model is that only the node CreditWorthiness is of interest to the user and is designated as a target.



[Oniśko et al.] 70 variables; 2,139 numerical parameters



[Ońisko et al.] 18 variables; 295,163 numerical parameters



infection_name
Candida 0%
Chlamydia 0%
Coccobacilli 0%
Condyloma 0%
Herpes 0%
HPV_NEGATIVE 0%
HPV_POSITIVE 1%
NA 99%
Trichomonas 0%
Age
a1_below_20 0%
a2_20_29 0%
a3_29_45 100%
a4_45_60 0%
a5_60_up 0%
Race
Black 0%
Other 0%
Unknown 0%
White 100%
Polyps
yes 1%
no 7%
NA 91%
cervix
NA 18%
benign 9%
CIN1 14%
CIN2_CIN3_AIS 54%
carcinoma 1%
carcinoma_not_cervical 0%
VAIN1 0%
VAIN2_VAIN3 0%
vaginal_carcinoma 1%
benign_vagina 1%
cancer_name
Breast 0%
Cervical 0%
Endometrial 0%
NA 99%
Other 0%
Ovarian 0%
Uterine 0%
Vaginal 0%
Vulvar 0%
Uterus
uterine_carcinoma 0%
benign 4%
NA 96%
hysterectomy

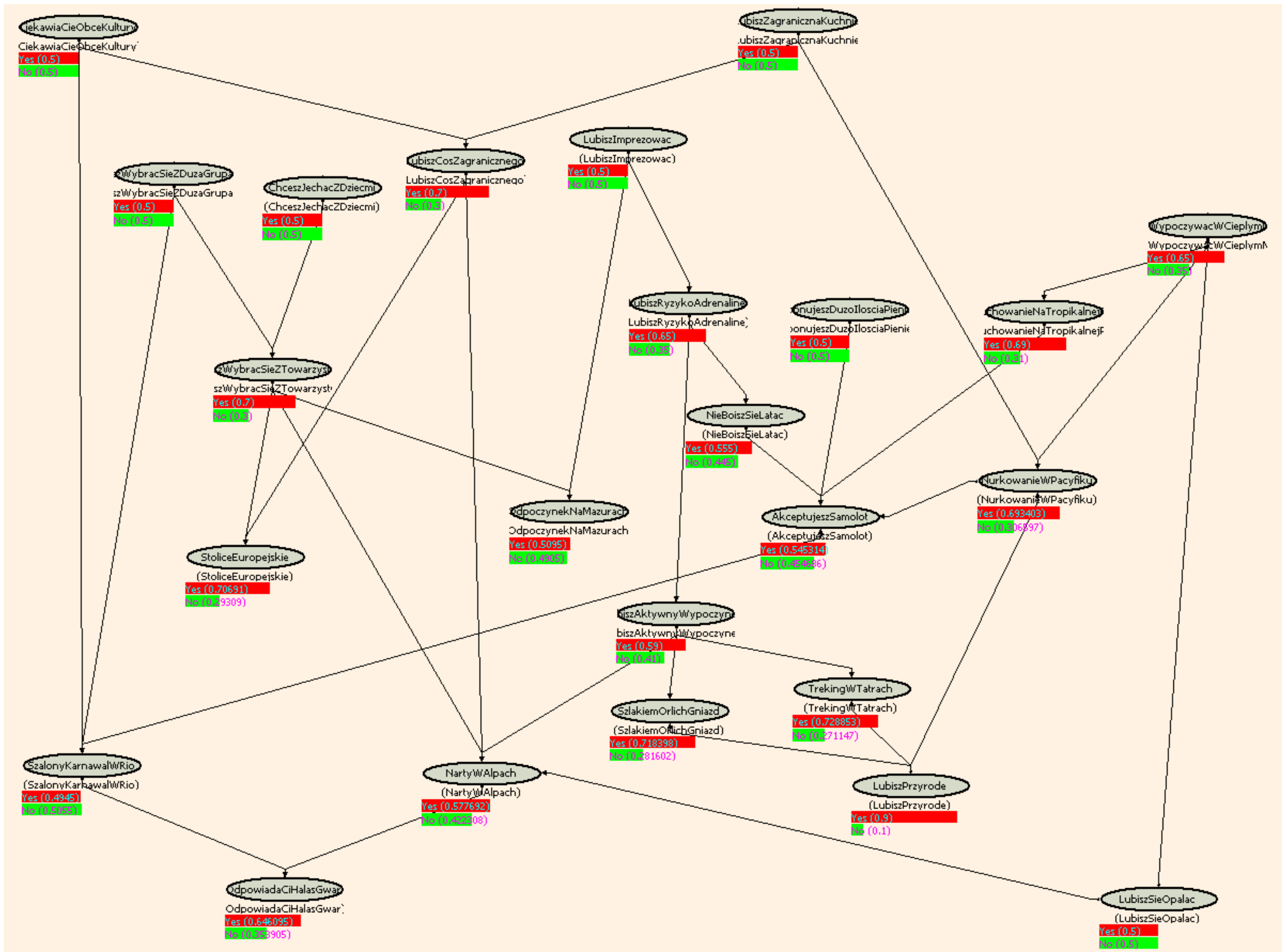
Problemem w którego rozwiązaniu ma pomóc zrobiona przez nas sieć Bayesa jest zaproponowanie najodpowiedniejszej wycieczki dla klienta w biurze podróży po odpowiedzi przez niego na kilka pytań.

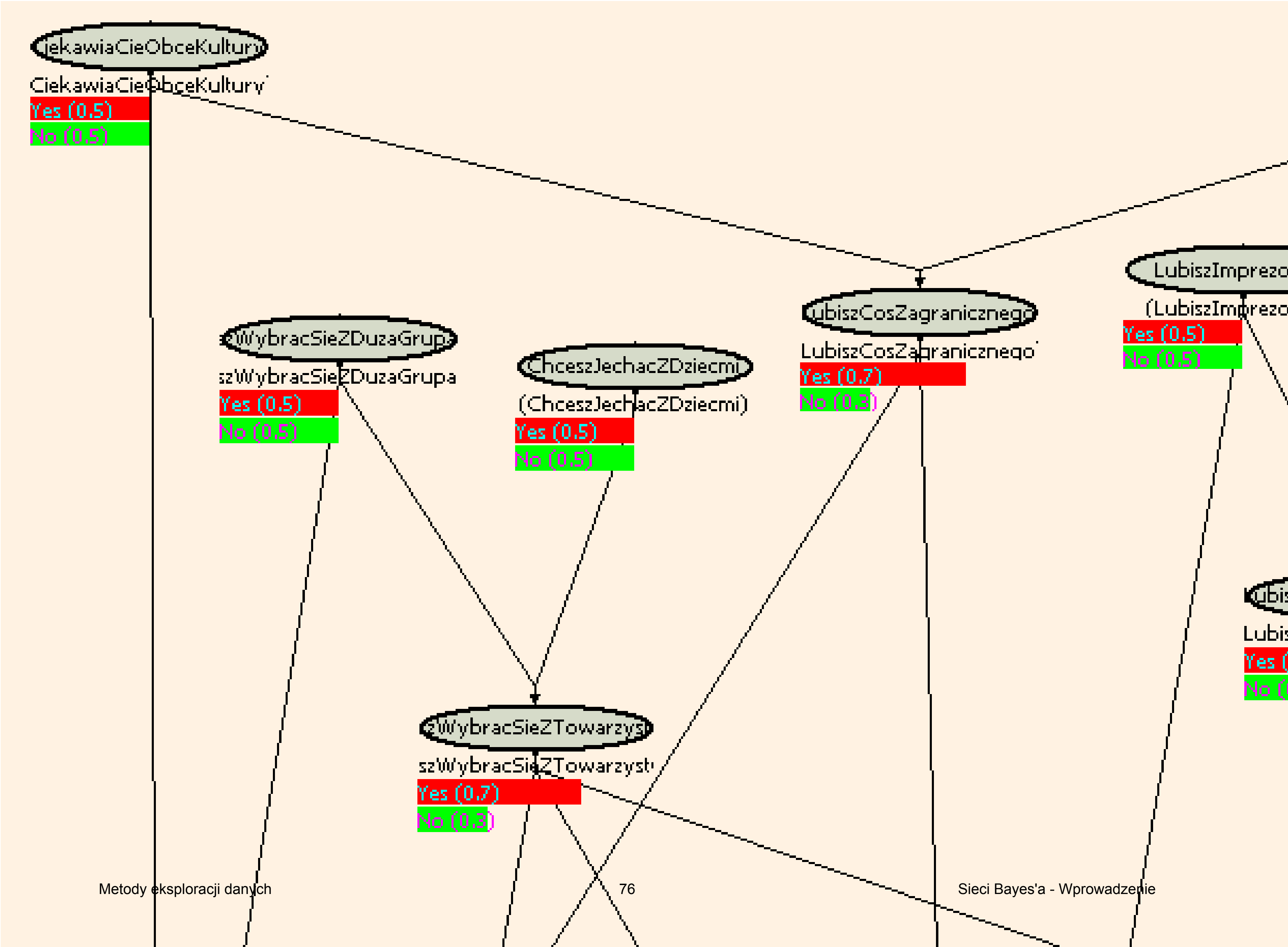
Hipotezy :

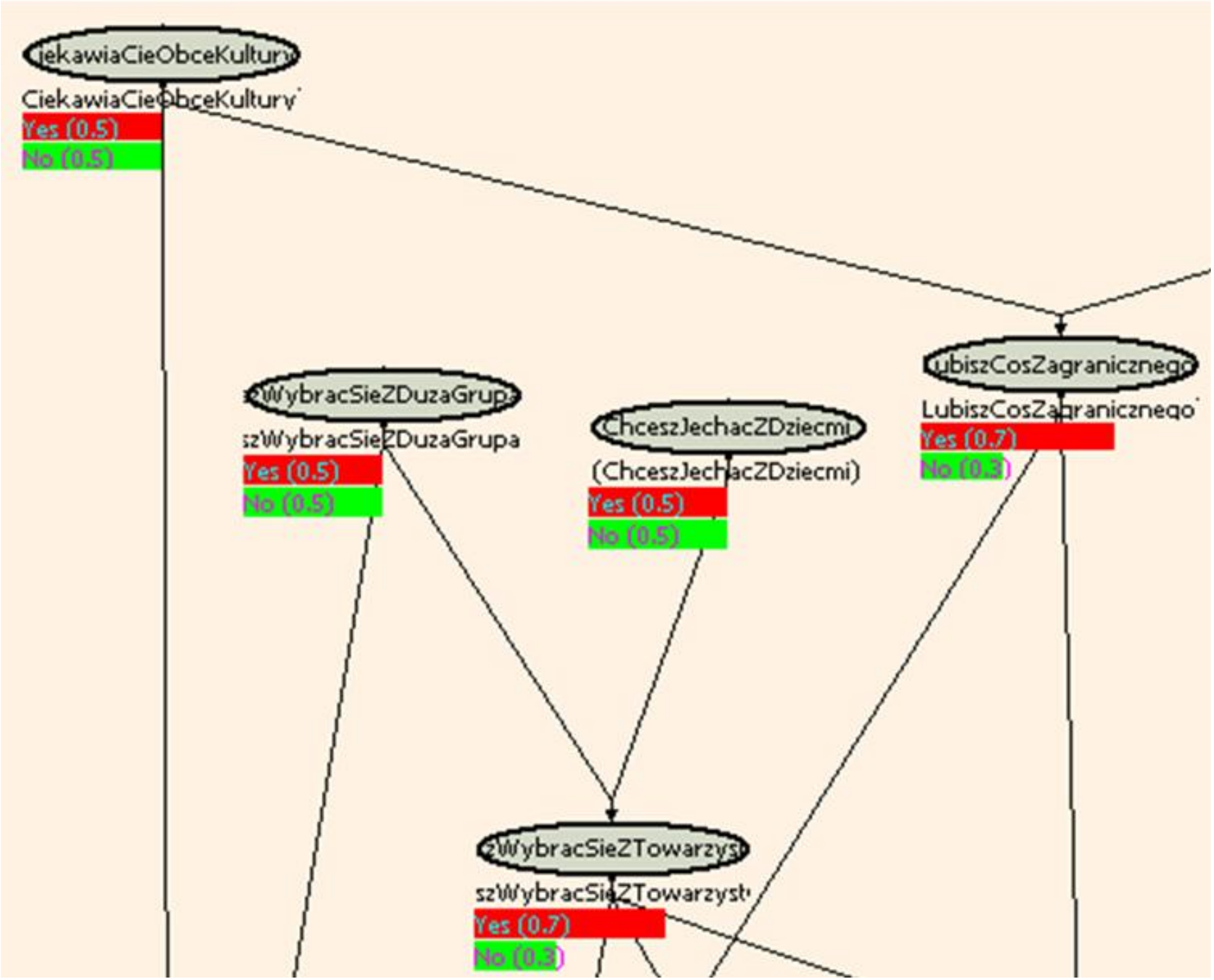
- Szalony karnawał w Rio
- Wypoczynek na Mazurach
- Stolice Europejskie
- itd.

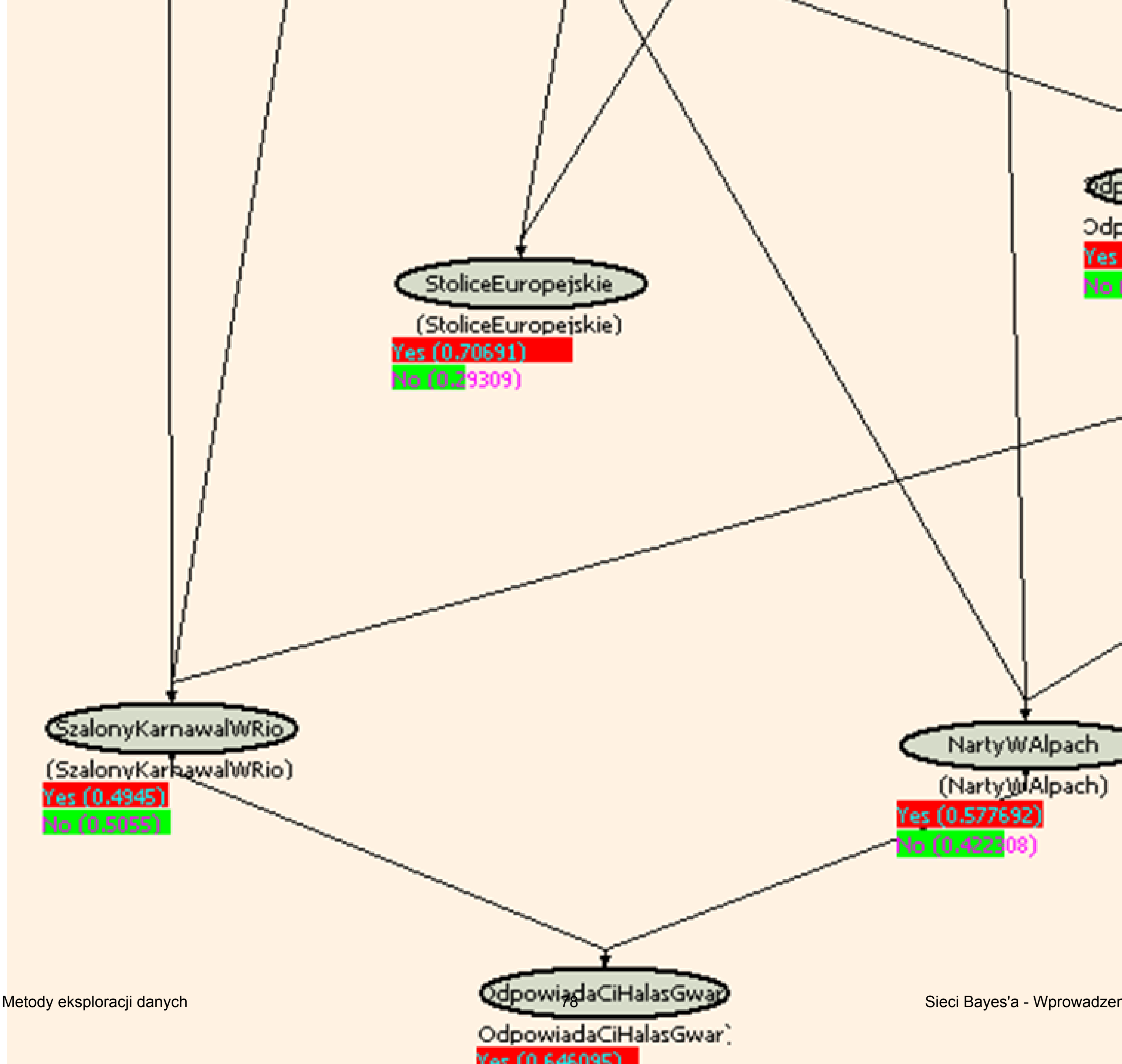
Symptomy:

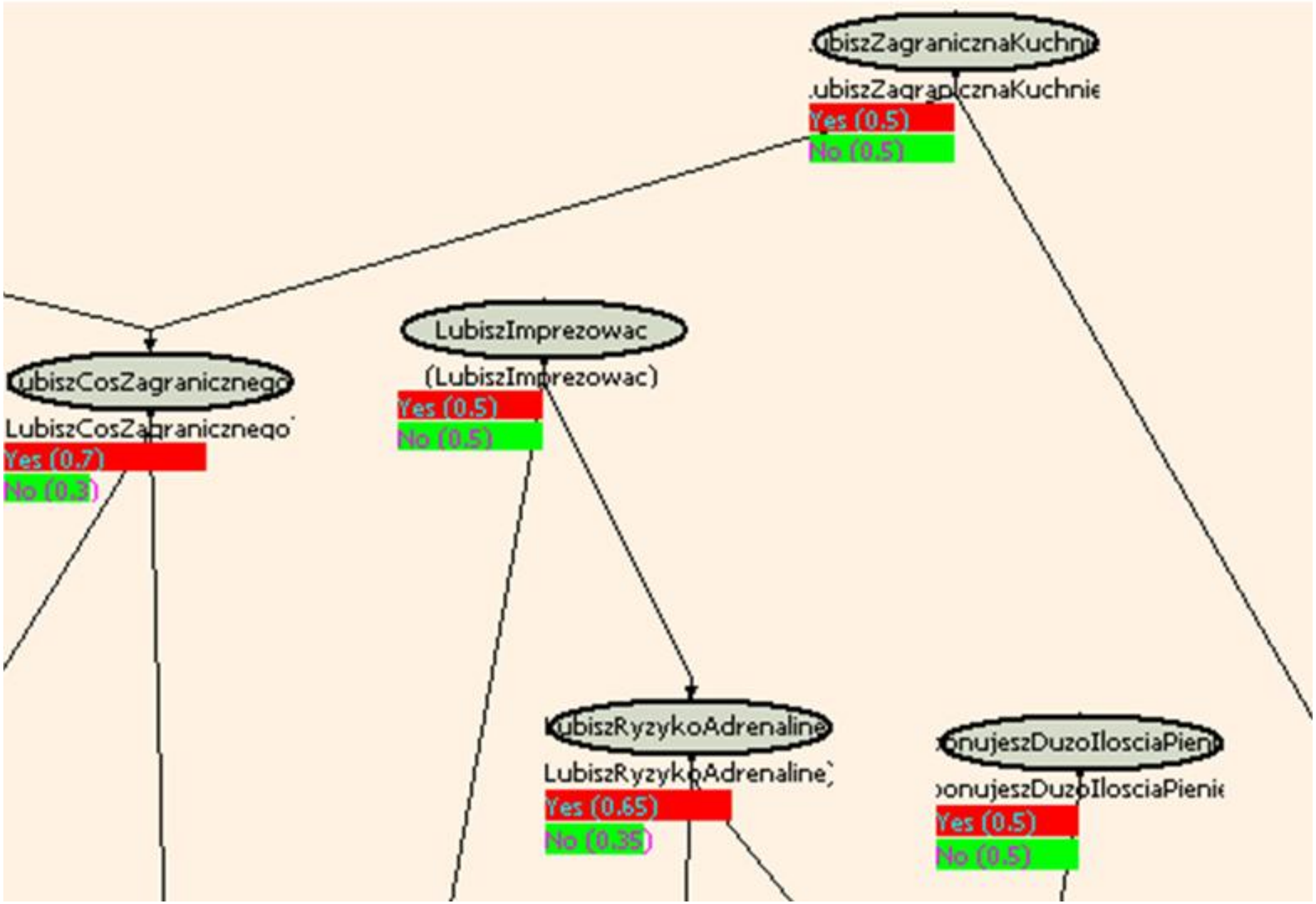
- Ciekawią Cię obce kultury
- Lubisz zagraniczną kuchnię
- Chcesz wypoczywać w ciepłym miejscu
- itd.

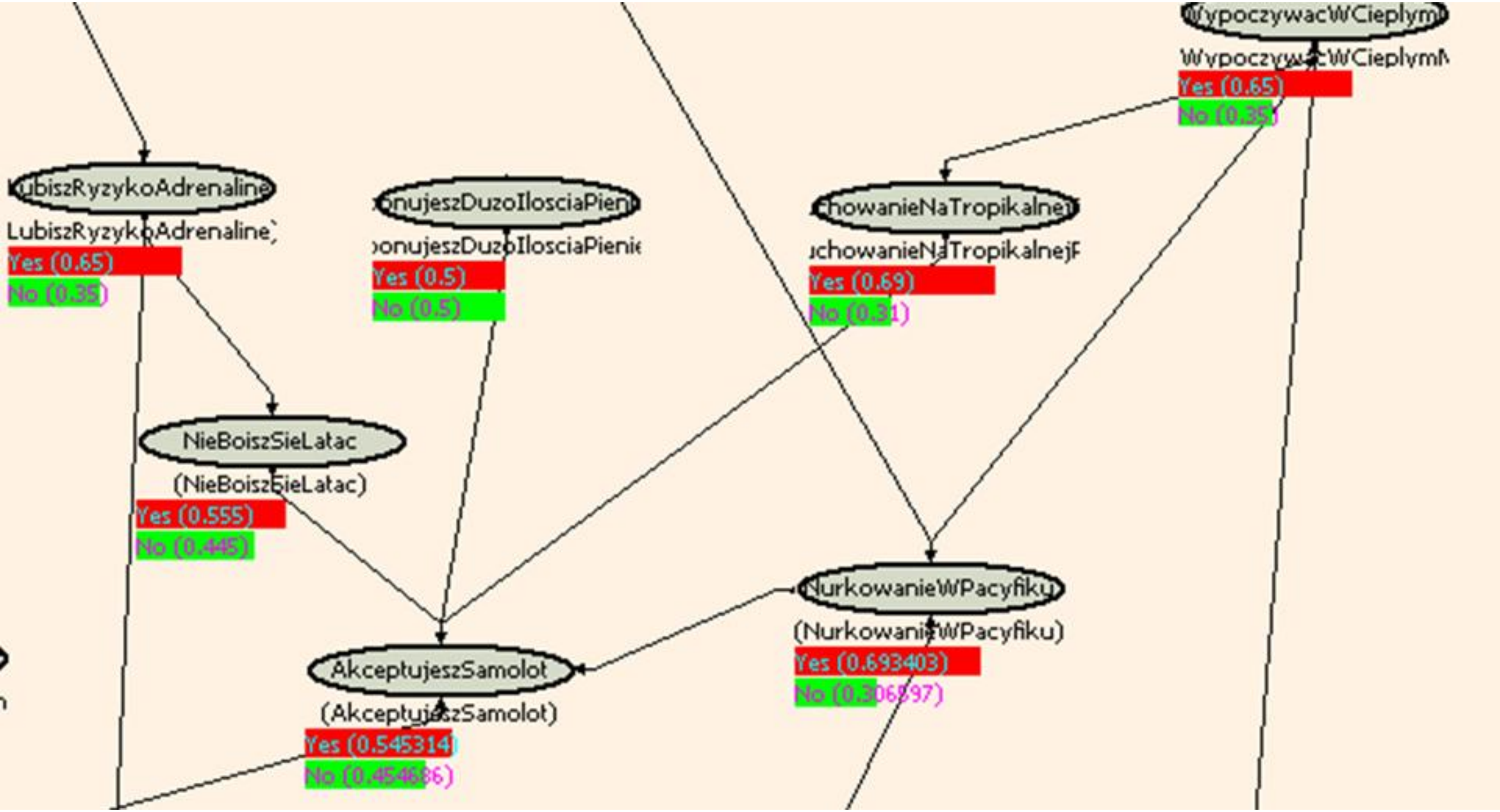

LubiszImprezowac
(LubiszImprezowac)
Yes (0.5)
No (0.5)
ChceszJechacZDziecmi
(ChceszJechacZDziecmi)
Yes (0.5)
No (0.5)
NieBoiszSieLatac
(NieBoiszSieLatac)
Yes (0.555)
No (0.445)
AkceptujeszSamolot
(AkceptujeszSamolot)
Yes (0.545314)
NurkowanieWPacyfiku
(NurkowanieWPacyfiku)
Yes (0.693403)
StoliceEuropejskie
(StoliceEuropejskie)
Yes (0.70691)
TrekingWTatrach
(TrekingWTatrach)
Yes (0.728853)
SzlakiemOrlichGniazd
(SzlakiemOrlichGniazd)
Yes (0.718398)
SzalonyKarnawalWRio
(SzalonyKarnawalWRio)
Yes (0.4945)
No (0.5055)
NartyWAlpach
(NartyWAlpach)
Yes (0.577692)
LubiszPrzyrode
(LubiszPrzyrode)
Yes (0.9)
No (0.1)
LubiszSieOpalac
(LubiszSieOpalac)
Yes (0.5)
No (0.5)

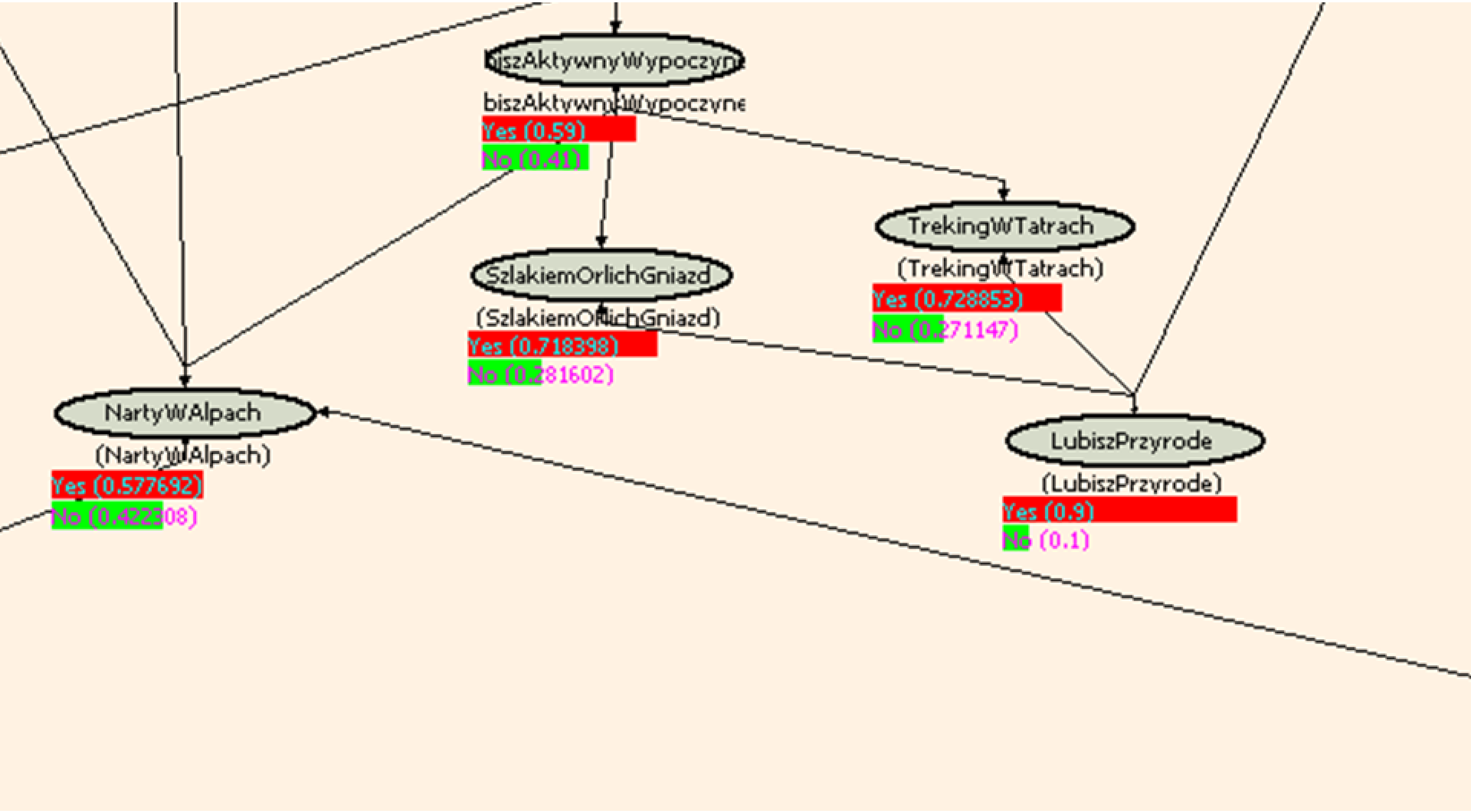

CiekawiaCieObceKultury
Yes (0.5)
No (0.5)
szWybracSieZDuzaGrupa
Yes (0.5)
No (0.5)
(ChceszJechacZDziecmi)
Yes (0.5)
No (0.5)
LubiszCosZagranicznego
Yes (0.7)
No (0.3)
(LubiszImprezo
Yes (0.5)
No (0.5)
szWybracSieZTowarzyst
Yes (0.7)
No (0.3)


iekawiaCieObceKultury
CiekawiaCieObceKultury
Yes (0.5)
No (0.5)
LubiszCosZagranicznego
LubiszCosZagranicznego
Yes (0.7)
No (0.3)
zWybracSieZDuzaGrupa
szWybracSieZDuzaGrupa
Yes (0.5)
No (0.5)
ChceszJechacZDziecmi
(ChceszJechacZDziecmi)
Yes (0.5)
No (0.5)
zWybracSieZTowarzyst
szWybracSieZTowarzyst
Yes (0.7)
No (0.3)


StoliceEuropejskie
(StoliceEuropejskie)
Yes (0.70691)
No (0.29309)
SzalonyKarnawalWRio
(SzalonyKarnawalWRio)
Yes (0.4945)
No (0.5055)
NartyWAlpach
(NartyWAlpach)
Yes (0.577692)
No (0.422308)
OdpowiadaCiHalasGwar


LubiszImprezowac
(LubiszImprezowac)
Yes (0.5)
No (0.5)
Yes (0.5)
No (0.5)
Yes (0.7)
No (0.3)
Yes (0.65)
No (0.35)
Yes (0.5)
No (0.5)

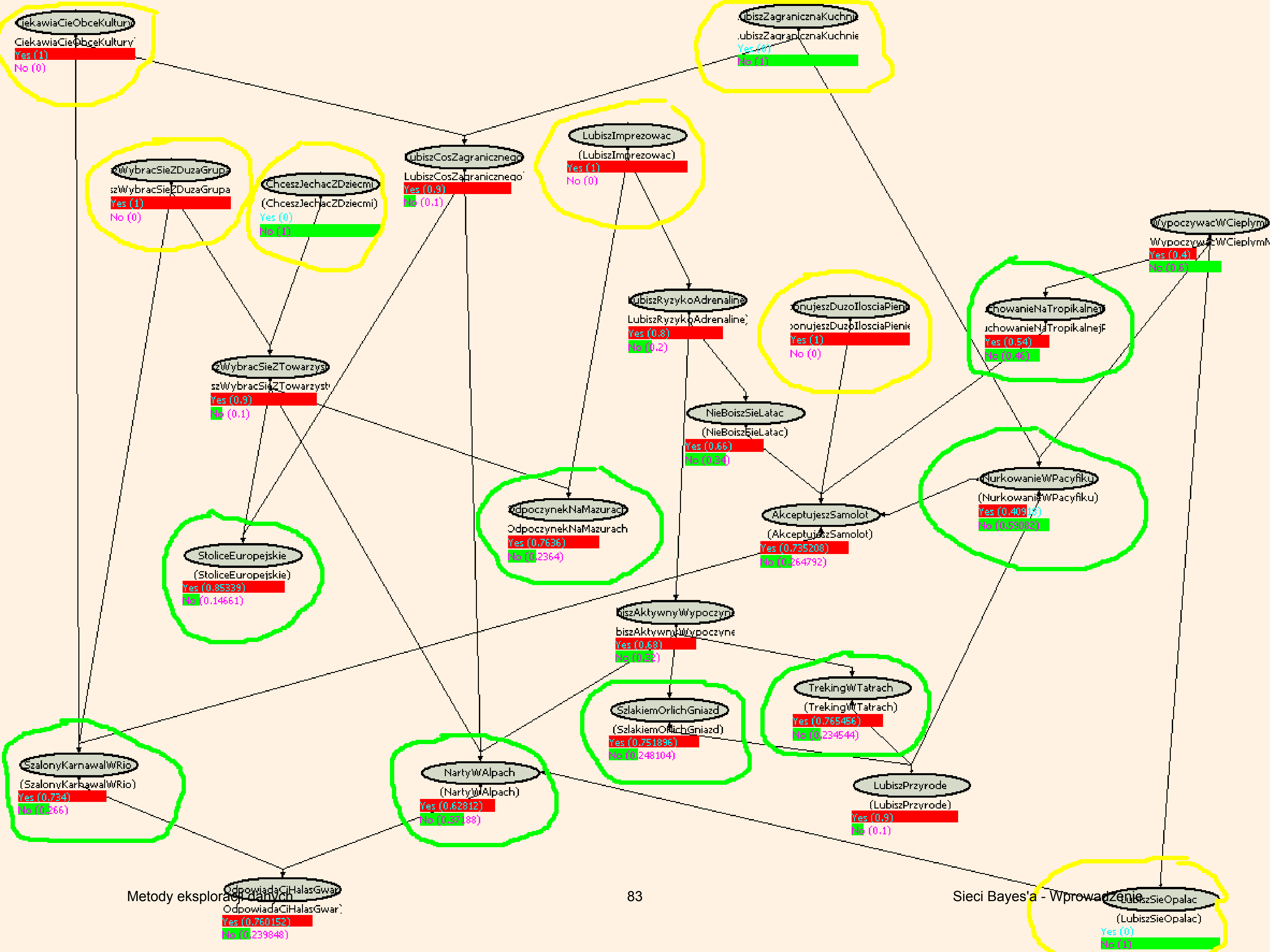

WypoczywacWCieplym
Yes (0.65)
No (0.35)
LubiszRyzykoAdrenaline
LubiszRyzykoAdrenaline
Yes (0.65)
No (0.35)
Yes (0.5)
No (0.5)
Yes (0.69)
No (0.31)
NieBoiszSieLatac
(NieBoiszSieLatac)
Yes (0.555)
No (0.445)
NurkowanieWPacyfiku
(NurkowanieWPacyfiku)
Yes (0.693403)
No (0.306597)
AkceptujeszSamolot
(AkceptujeszSamolot)
Yes (0.545314)
No (0.454686)



biszAktywnyWypoczyn
biszAktywnyWypoczyne
Yes (0.59)
No (0.41)
TrekingWTatrach
(TrekingWTatrach)
Yes (0.728853)
No (0.271147)
SzlakiemOrlichGniazd
(SzlakiemOrlichGniazd)
Yes (0.718398)
No (0.281602)
NartyWAlpach
(NartyWAlpach)
Yes (0.577692)
No (0.422308)
LubiszPrzyrode
(LubiszPrzyrode)
Yes (0.9)
No (0.1)

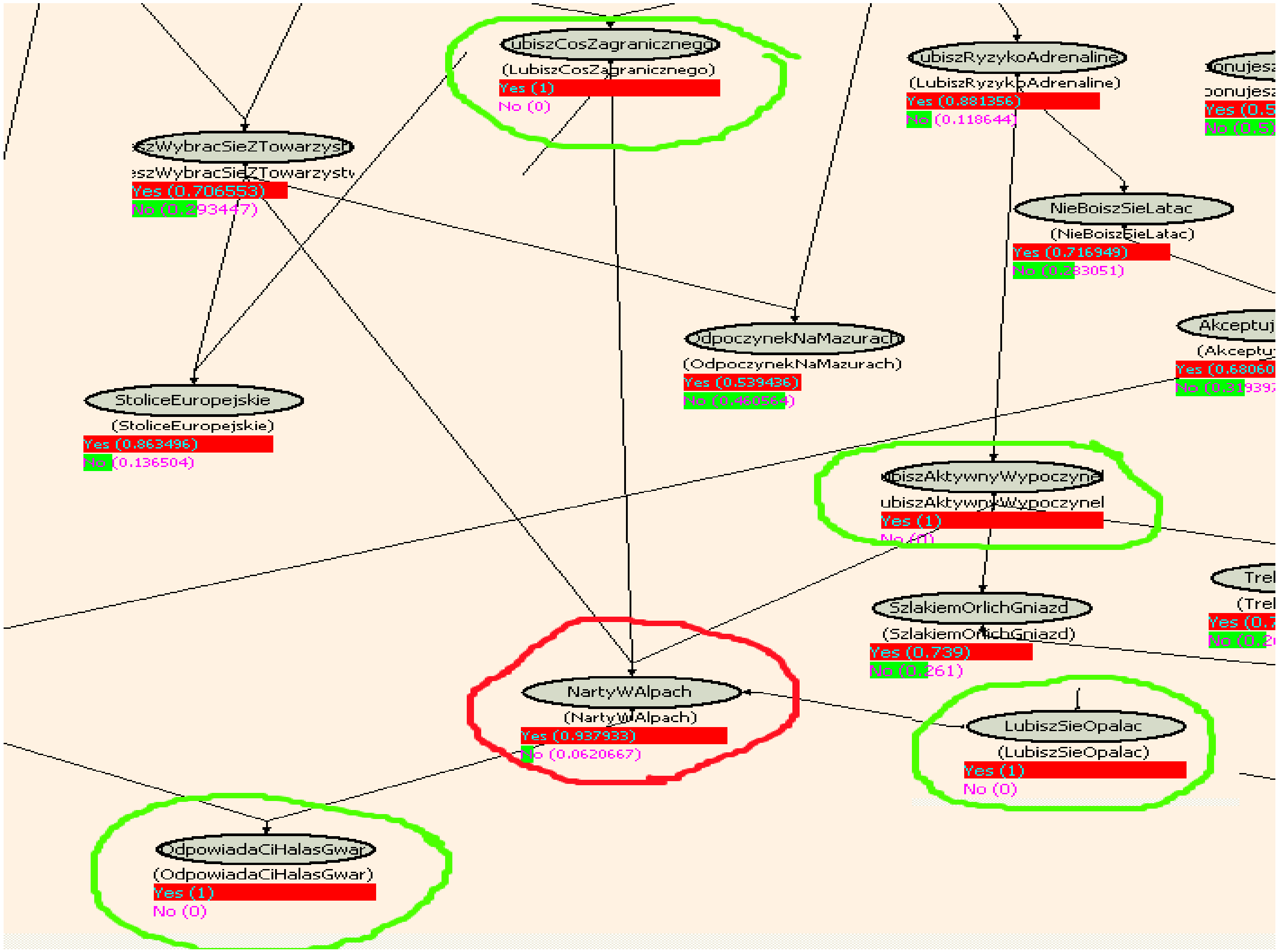
4 przykłady działania:

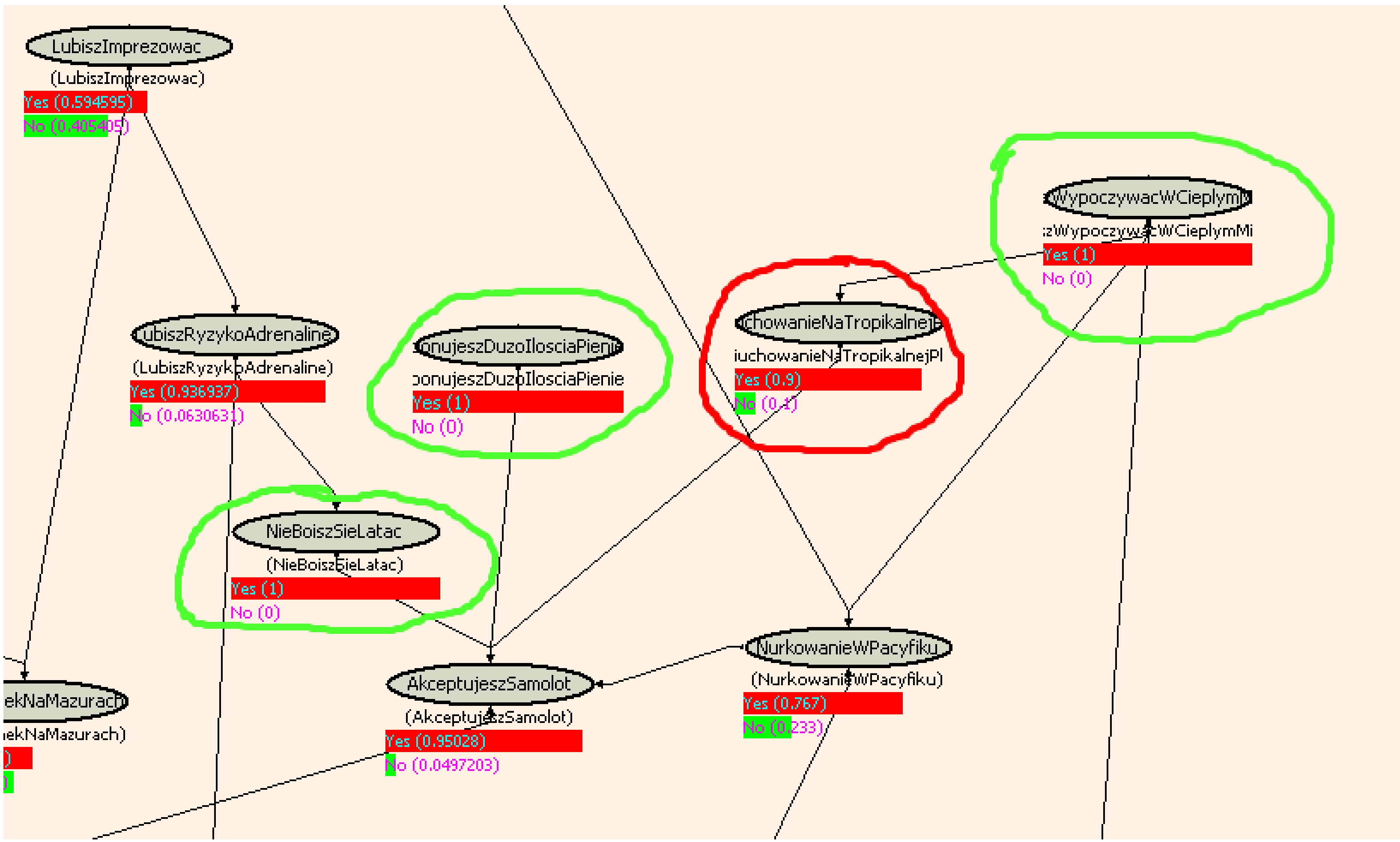
- Bayex vs. Sieć Bayesa.
- Wybieramy hipotezę – patrzymy na symptomy
- wybieramy symptomy – patrzymy na hipotezy
- model mieszany

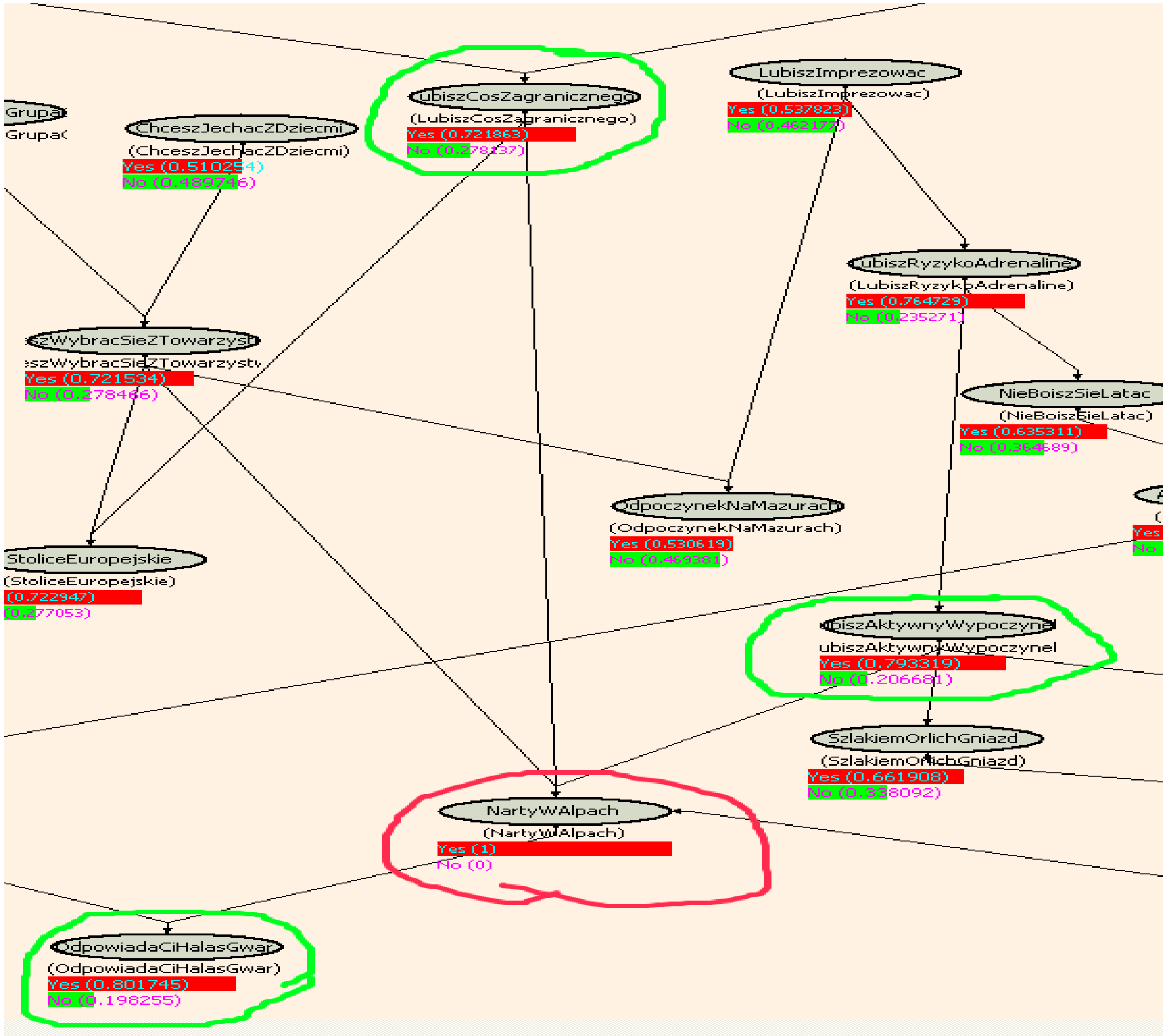

iekawiaCieObceKultury
CiekawiaCieObceKultury
Yes (1)
No (0)
ubiszZagranicznaKuchni
.ubiszZagranicznaKuchnie
Yes (0)
No (1)
LubiszImprezowac
(LubiszImprezowac)
Yes (1)
No (0)
ubiszCosZagranicznego
LubiszCosZagranicznego
Yes (0.9)
No (0.1)
zWybracSieZDuzaGrup
szWybracSieZDuzaGrupa
Yes (1)
No (0)
ChceszJechacZDziecmi
(ChceszJechacZDziecmi)
Yes (0)
No (1)
WypoczywacWCieplym
WypoczywacWCieplymM
Yes (0.4)
No (0.6)
ubiszRyzykoAdrenaline
LubiszRyzykoAdrenaline)
Yes (0.8)
No (0.2)
onujeszDuzoIlosciaPien
ponujeszDuzoIlosciaPienie
Yes (1)
No (0)
chowanieNaTropikalnej
uchowanieNaTropikalnejP
Yes (0.54)
No (0.46)
zWybracSieZTowarzyst
szWybracSieZTowarzyst
Yes (0.9)
No (0.1)
NieBoiszSieLatac
(NieBoiszSieLatac)
Yes (0.66)
No (0.34)
NurkowanieWPacyfiku
(NurkowanieWPacyfiku)
Yes (0.40918)
No (0.59082)
OdpoczynekNaMazurach
OdpoczynekNaMazurach
Yes (0.7636)
No (0.2364)
AkceptujeszSamolot
(AkceptujeszSamolot)
Yes (0.735208)
No (0.264792)
StoliceEuropejskie
(StoliceEuropejskie)
Yes (0.85339)
No (0.14661)
biszAktywnyWypoczyn
biszAktywnyWypoczyne
Yes (0.68)
No (0.32)
TrekingWTatrach
(TrekingWTatrach)
Yes (0.765456)
No (0.234544)
SzlakiemOrlichGniazd
(SzlakiemOrlichGniazd)
Yes (0.751896)
No (0.248104)
SzalonyKarnawalWRio
(SzalonyKarnawalWRio)
Yes (0.734)
No (0.266)
NartyWAlpach
(NartyWAlpach)
Yes (0.62812)
No (0.37188)
LubiszPrzyrode
(LubiszPrzyrode)
Yes (0.9)
No (0.1)
OdpowiadaCiHalasGwar
OdpowiadaCiHalasGwar
Yes (0.760152)
No (0.239848)
LubiszSieOpalac
(LubiszSieOpalac)
Yes (0)
No (1)

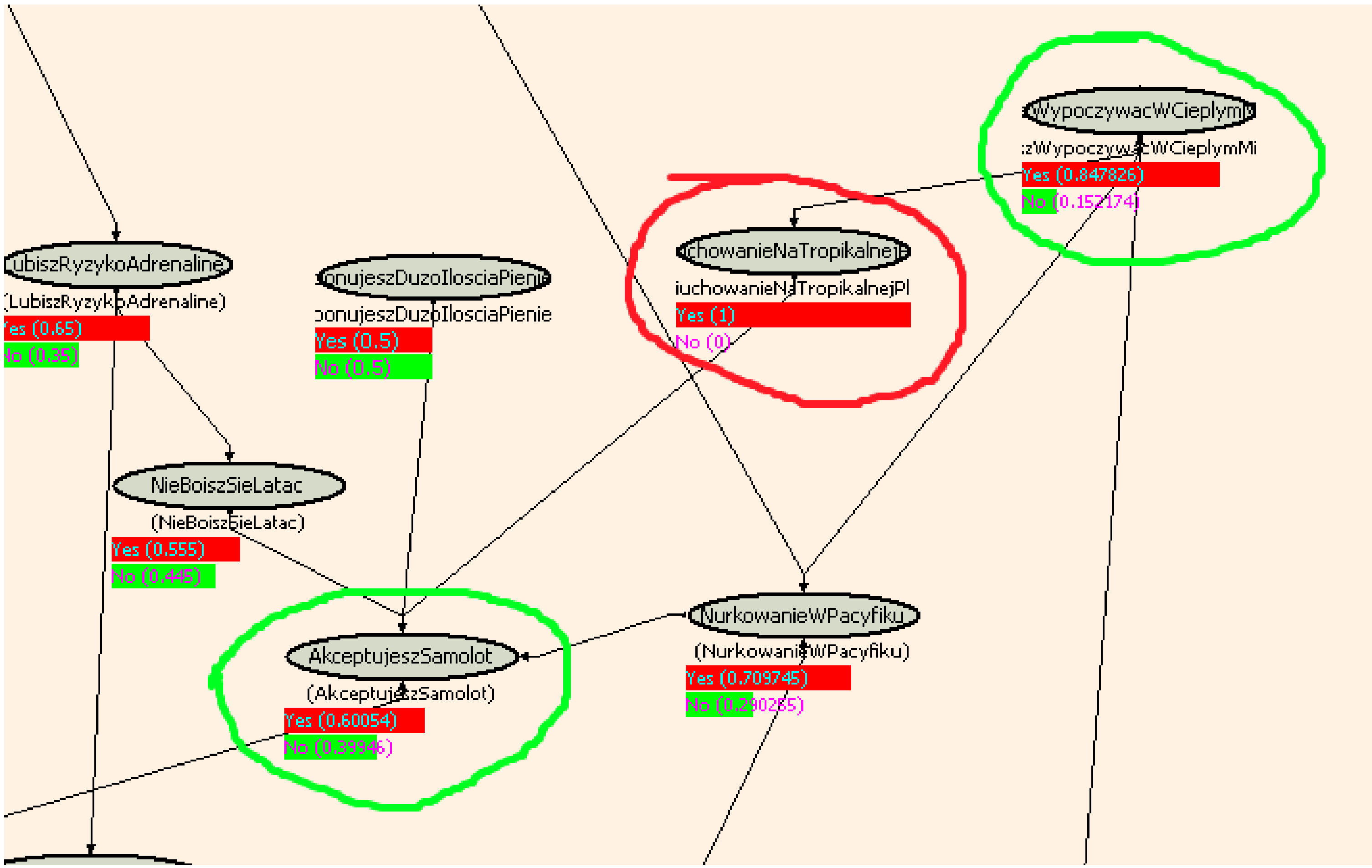
W tych przykładach pokażemy działanie sieci od dwóch stron:

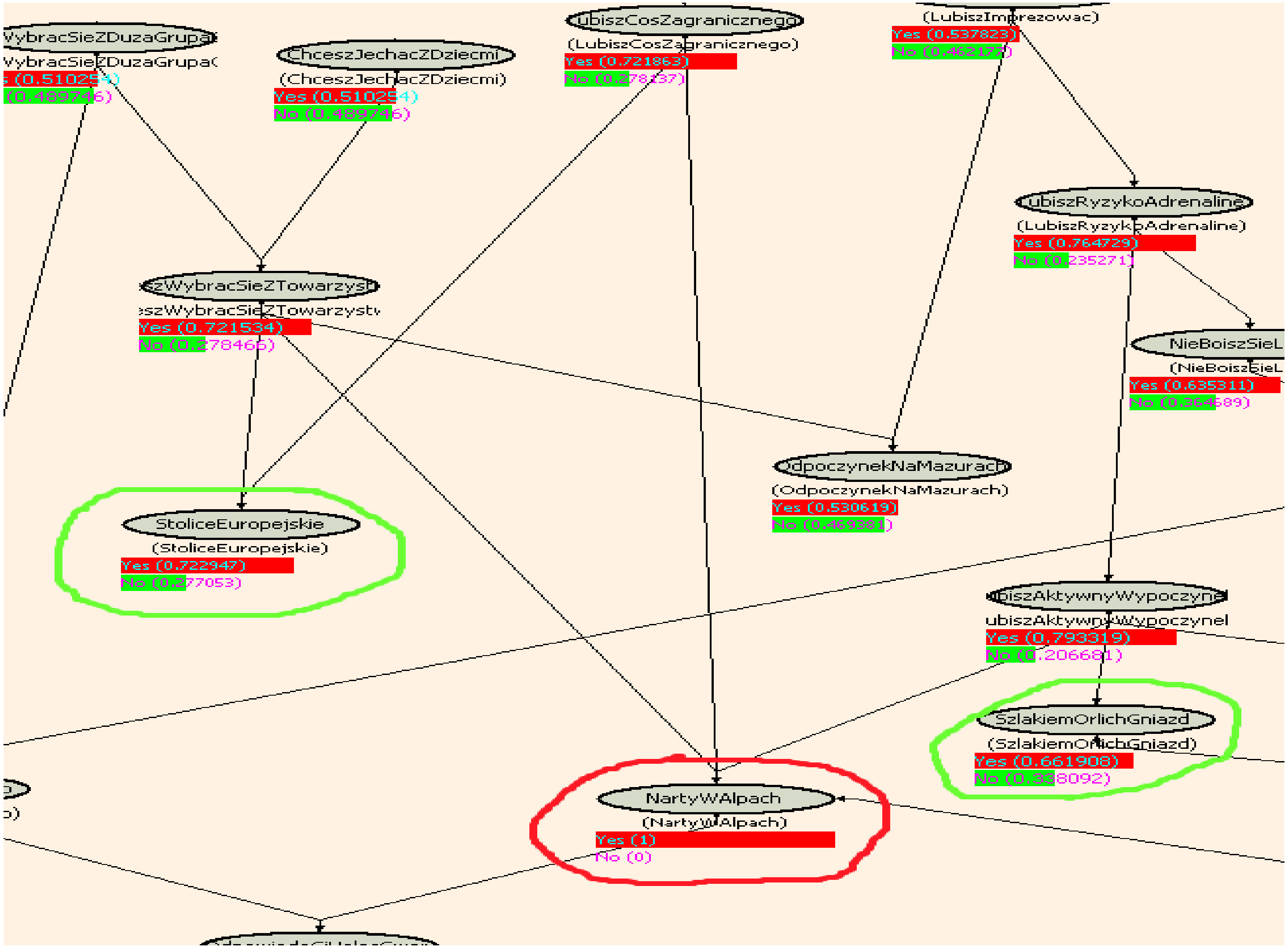
- Wybieramy symptomy i patrzymy jakie wyjdą hipotezy
  - Chcemy wybrać tak preferencje, żeby pojechać na narty
  - Chcemy wybrać tak preferencje, żeby polecieć na tropikalną plażę
- Wybieramy hipotezy i patrzymy jakie wyjdą symptomy
  - Narty w Alpach
  - Leniuchowanie na tropikalnej plaży


(LubiszCosZagranicznego)
Yes (1)
No (0)
(LubiszRyzykoAdrenaline)
Yes (0.881356)
No (0.118644)
Yes (0.706553)
No (0.293447)
NieBoiszSieLatac
(NieBoiszSieLatac)
Yes (0.716949)
No (0.283051)
(OdpoczynekNaMazurach)
Yes (0.539436)
No (0.460564)
StoliceEuropejskie
(StoliceEuropejskie)
Yes (0.863496)
No (0.136504)
Yes (1)
No (0)
SzlakiemOrlichGniazd
(SzlakiemOrlichGniazd)
Yes (0.739)
No (0.261)
NartyWAlpach
(NartyWAlpach)
Yes (0.937933)
No (0.0620667)
LubiszSieOpalac
(LubiszSieOpalac)
Yes (1)
No (0)
(OdpowiadaCiHalasGwar)
Yes (1)
No (0)


LubiszImprezowac
(LubiszImprezowac)
Yes (0.594595)
No (0.405405)
ubiszRyzykoAdrenaline
(LubiszRyzykoAdrenaline)
Yes (0.936937)
No (0.0630631)
onujeszDuzoIlosciaPienie
onujeszDuzoIlosciaPienie
Yes (1)
No (0)
chowanieNaTropikalnej
iuchowanieNaTropikalnejPl
Yes (0.9)
No (0.1)
WypoczywacWCieplym
zWypoczywacWCieplymMi
Yes (1)
No (0)
NieBoiszSieLatac
(NieBoiszSieLatac)
Yes (1)
No (0)
NurkowanieWPacyfiku
(NurkowanieWPacyfiku)
Yes (0.767)
No (0.233)
ekNaMazurach
ekNaMazurach)
AkceptujeszSamolot
(AkceptujeszSamolot)
Yes (0.95028)
No (0.0497203)

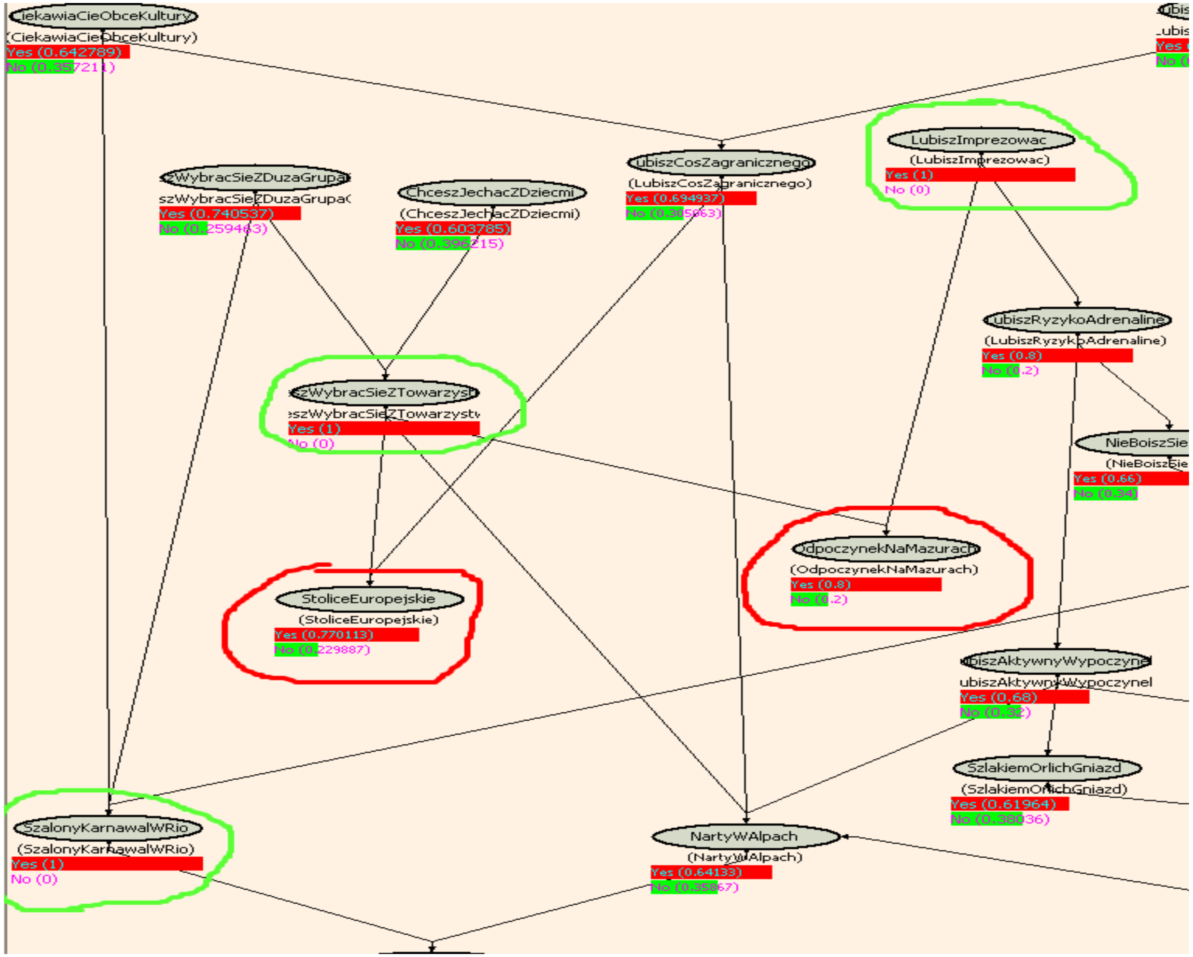

LubiszImprezowac
(LubiszImprezowac)
Yes (0.537823)
No (0.462177)
ubiszCosZagranicznego
(LubiszCosZagranicznego)
Yes (0.721863)
No (0.278137)
ChceszJechacZDziecmi
(ChceszJechacZDziecmi)
Yes (0.510254)
No (0.489746)
ubiszRyzykoAdrenaline
(LubiszRyzykoAdrenaline)
Yes (0.764729)
No (0.235271)
zWybracSieZTowarzyst
Yes (0.721534)
No (0.278466)
NieBoiszSieLatac
(NieBoiszSieLatac)
Yes (0.635311)
No (0.364689)
dpoczynekNaMazurach
(OdpoczynekNaMazurach)
Yes (0.530619)
No (0.469381)
StoliceEuropejskie
(StoliceEuropejskie)
(0.722947)
(0.277053)
ubiszAktywnyWypoczynek
Yes (0.793319)
No (0.206681)
SzlakiemOrlichGniazd
(SzlakiemOrlichGniazd)
Yes (0.661908)
No (0.338092)
NartyWAlpach
(NartyWAlpach)
Yes (1)
No (0)
OdpowiadaCiHalasGwar
(OdpowiadaCiHalasGwar)
Yes (0.801745)
No (0.198255)


LubiszRyzykoAdrenaline
(LubiszRyzykoAdrenaline)
Yes (0.65)
No (0.35)
NieBoiszSieLatac
(NieBoiszSieLatac)
Yes (0.555)
No (0.445)
Yes (0.5)
No (0.5)
Yes (1)
No (0)
Yes (0.847826)
No (0.152174)
AkceptujeszSamolot
(AkceptujeszSamolot)
Yes (0.60054)
No (0.39946)
NurkowanieWPacyfiku
(NurkowanieWPacyfiku)
Yes (0.709745)



ChceszJechacZDziecmi
(ChceszJechacZDziecmi)
Yes (0.510254)
No (0.489746)
(LubiszCosZagranicznego)
Yes (0.721863)
No (0.278137)
(LubiszImprezowac)
Yes (0.537823)
No (0.462177)
(LubiszRyzykoAdrenaline)
Yes (0.764729)
No (0.235271)
Yes (0.721534)
No (0.278466)
Yes (0.635311)
No (0.364689)
(OdpoczynekNaMazurach)
Yes (0.530619)
No (0.469381)
StoliceEuropejskie
(StoliceEuropejskie)
Yes (0.722947)
No (0.277053)
Yes (0.793319)
No (0.206681)
SzlakiemOrlichGniazd
(SzlakiemOrlichGniazd)
Yes (0.661908)
No (0.338092)
NartyWAlpach
(NartyWAlpach)
Yes (1)
No (0)

- Przychodzi klient do biura i mówi
  - Chciałbym polecieć na karnawał do Rio
  - Ale nie mam kasy
  - Lubię imprezować
  - Chce też wybrać się z towarzystwem
  - Co mi polecacie ?


CiekawiaCieObceKultury
(CiekawiaCieObceKultury)
Yes (0.642789)
No (0.357211)
szWybracSieZDuzaGrupa
szWybracSieZDuzaGrupa(
Yes (0.740537)
No (0.259463)
ChceszJechacZDziecmi
(ChceszJechacZDziecmi)
Yes (0.603785)
No (0.396215)
LubiszCosZagranicznego
(LubiszCosZagranicznego)
Yes (0.694937)
No (0.305063)
LubiszImprezowac
(LubiszImprezowac)
Yes (1)
No (0)
LubiszRyzykoAdrenaline
(LubiszRyzykoAdrenaline)
Yes (0.8)
No (0.2)
szWybracSieZTowarzyst
szWybracSieZTowarzystw
Yes (1)
No (0)
NieBoiszSie
(NieBoiszSie
Yes (0.66)
No (0.34)
OdpoczynekNaMazurach
(OdpoczynekNaMazurach)
Yes (0.8)
No (0.2)
StoliceEuropejskie
(StoliceEuropejskie)
Yes (0.770113)
No (0.229887)
LubiszAktywnyWypoczynek
LubiszAktywnyWypoczynek
Yes (0.68)
No (0.32)
SzlakiemOrlichGniazd
(SzlakiemOrlichGniazd)
Yes (0.61964)
No (0.38036)
SzalonyKarnawalWRio
(SzalonyKarnawalWRio)
Yes (1)
No (0)
NartyWAlpach
(NartyWAlpach)
Yes (0.64133)
No (0.35867)

Sieci bayesowskie – wnioskowanie w sytuacji niepewności

Przykład: jakie są szanse zdania ustnego egzaminu u prof. X, który jest kibicem Wisły i nie lubi deszczu ?

- Z - zaliczony egzamin
- N - dobre przygotowanie
- H - dobry humor egzaminatora
- A - awans Wisły do Ligi Mistrzów
- D - deszcz

Łączny rozkład prawdopodobieństwa (JPD):

$$P(Z, N, H, A ,D)$$

wyznaczony przez 2^5 wartości (32 wartości)

Sieci bayesowskie - wprowadzenie

Prawdopodobieństwo dobrego humoru, jeżeli Wisła awansowała: P(H=true | A=true):

$$P(H \mid A) = \frac{P(H, A)}{P(A)}$$

obliczymy z łącznego rozkładu P(Z, N, H, A ,D), na podstawie prawdopodobieństw brzegowych:

$$P(H, A) = \sum_{Z,N,D} P(Z, N, H, A, D)$$

8 sumowań

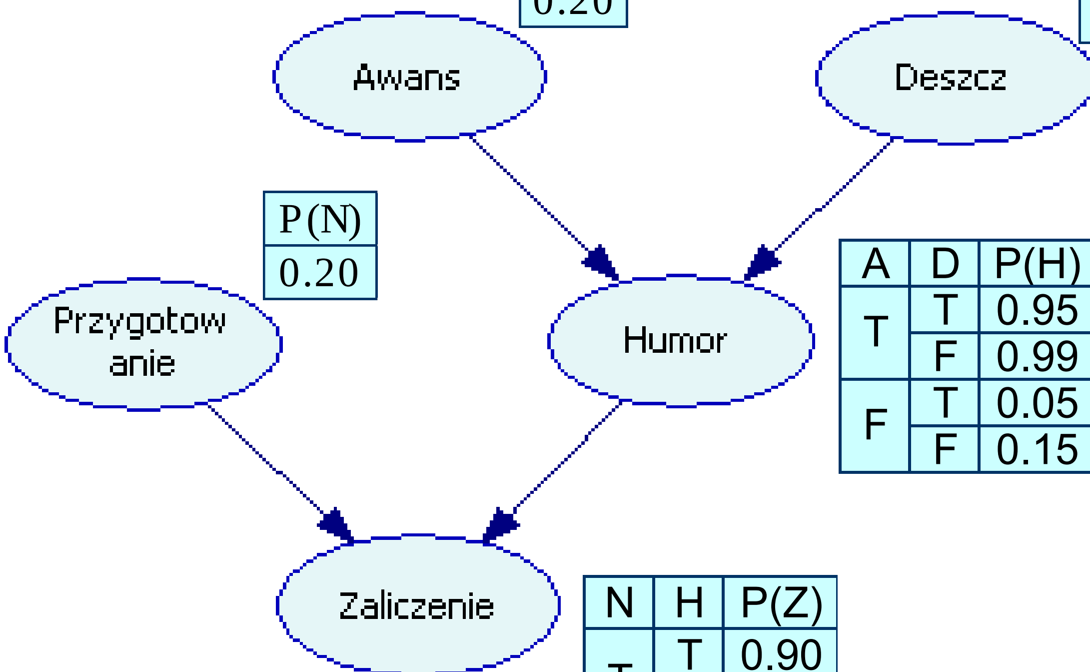
$$P(A) = \sum_{Z,N,H,D} P(Z, N, H, A, D)$$

16 sumowań

Sieci bayesowskie (sieci przekonań) - definicja

- Acykliczny graf skierowany
- Wierzchołki - zmienne losowe
- Topologa sieci: krawędzie reprezentują bezpośrednią zależność *przyczyna* $\rightarrow$ *skutek* $\equiv$ każda zmienna jest niezależna od nie-potomków (w szczególności dalekich przodków) pod warunkiem rodziców, np.: P(Z|H,D) = P(Z|H)
- Dla każdego węzła X zdefiniowana jest tablica prawdopodobieństw warunkowych X pod warunkiem jego rodziców w grafie

Sieci bayesowskie - definicja, przykład



P(A)
0.20

P(D)
0.30

P(N)
0.20

A	D	P(H)
T	T	0.95
	F	0.99
F	T	0.05
	F	0.15

N	H	P(Z)
T	T	0.90
	F	0.55
F	T	0.45
	F	0.05

$P(Z|H,D) = P(Z|H)$

Sieci bayesowskie - faktoryzacja

- Reguła łańcuchowa: z def. $P(X_1,X_2)=P(X_1|X_2)P(X_2)$

$$P(X_1,...,X_n)=\prod_i P(X_i \mid X_{i+1},...,X_n)$$

- Numerując wierzchołki grafu tak aby indeks każdej zmiennej był mniejszy niż indeks przypisany jego przodkom oraz korzystając z warunkowej niezależności otrzymujemy:

$$P(X_i \mid X_{i+1},...,X_n)=P(X_i \mid Parents(X_i))$$

- Model zupełny

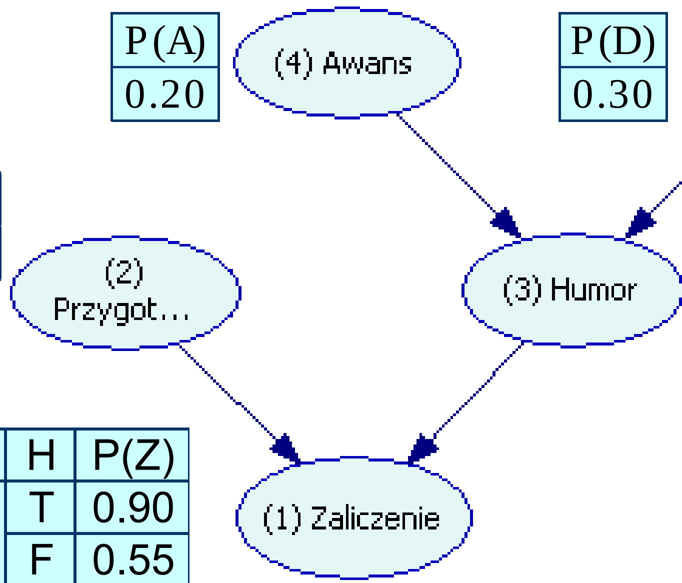
$$P(X_1,...,X_n)=\prod_i P(X_i \mid Parents(X_i))$$

Sieci bayesowskie - faktoryzacja

P(Z,N,H,A,D) = P(Z|N,H) × P(N) × P(H|A,D) × P(A) × P(D)

Jaka jest szansa zaliczenia dla nieprzygotowanego studenta, gdy pada, Wisła odpadłą i egzaminator jest w złym humorze

$P(Z \wedge \neg N \wedge \neg H \wedge \neg A \wedge D) = 0.05 \times 0.8 \times 0.05 \times 0.8 \times .30 = 0.0048$



P(A)
0.20

P(D)
0.30

P(N)
0.20

A	D	P(H)
T	T	0.95
	F	0.99
F	T	0.05
	F	0.15

N	H	P(Z)
T	T	0.90
	F	0.55
F	T	0.45
	F	0.05

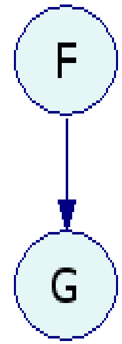
Sieci bayesowskie - korzyści

- Musimy pamiętać mniej wartości: w naszym przypadku 11 zamiast 31 (ogólnie $n \cdot 2^k$, n-liczba wierzchołków, k - maksymalna liczba rodziców; zamiast 2^n-1 wszystkich wartości w rozkładzie pełnym)
- Naturalne modelowanie: łatwiej oszacować prawd. warunkowe bezpośrednich zależności niż koniunkcji wszystkich możliwych zdarzeń
- Dowolny kierunek wnioskowania
- Czytelna reprezentacja wiedzy
- Łatwa modyfikacja

Sieci bayesowskie – wnioskowanie w sieci, twierdzenie Bayesa

F – pozwany jest ojcem

G – dziecko posiada tę samą co pozwany, unikalną (1/1000 osób) cechę genetyczną



P(F)
0.50

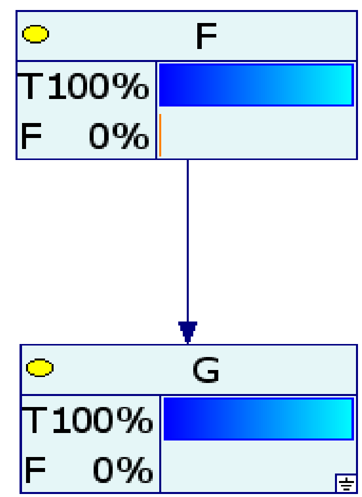
F	P(G|F)
True	1
False	0.001

P(G) = P(G|F)*P(F)+P(G|¬F)* P(¬F) =

= 1.0*0.5+0.001*0.5 = 0.5005

Jeżeli wiemy, że dziecko posiada w/w cechę genetyczną, to z tw. Bayesa:

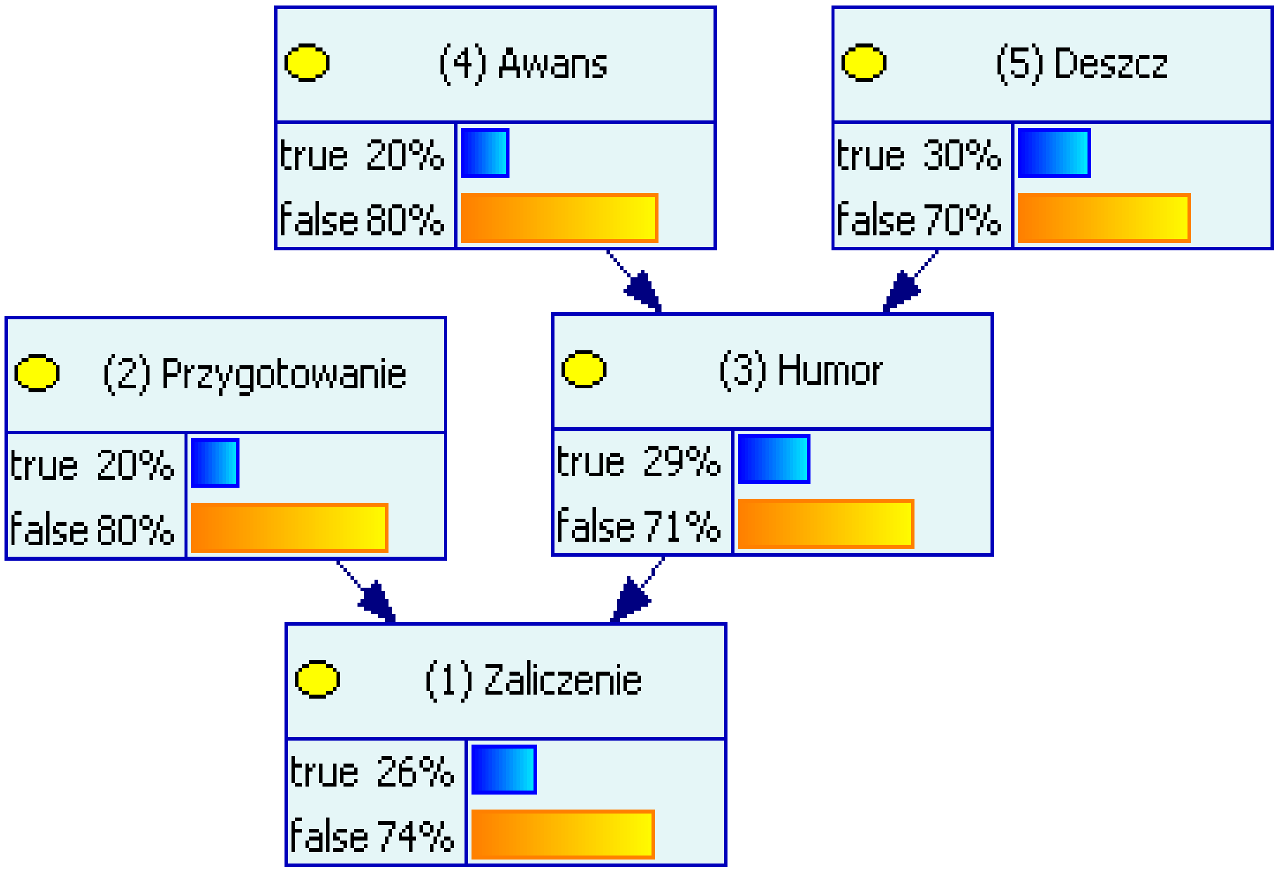
$$P(F\mid G)=\frac{P(G\mid F)P(F)}{P(G)}=\frac{1\cdot 0.5}{0.5005}=0.9990$$



Posługując się regułą Bayesa, odpowiednie algorytmy (w ogólności problem wnioskowania np. trudny) pozwalają wnioskować w sieci Bayesowskiej w dowolnym kierunku

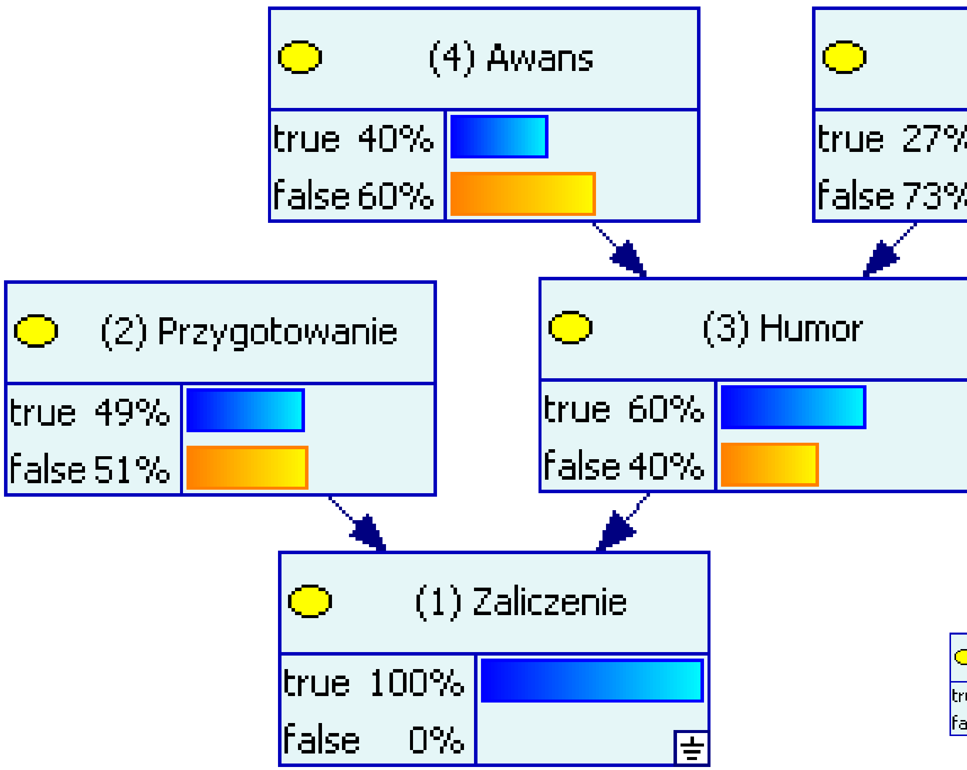
Sieci bayesowskie – możliwości wnioskowania: predykcja

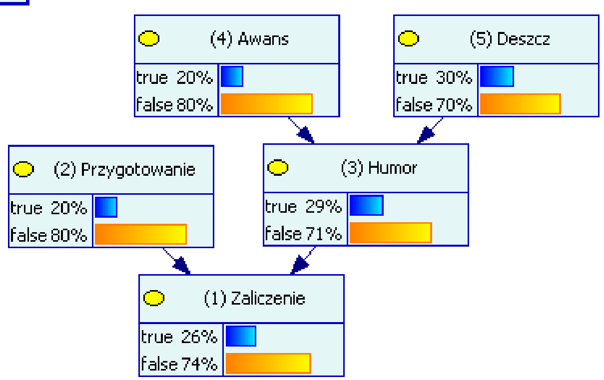
Prawdopodobieństwo Zaliczenia 74%



Sieci bayesowskie – wnioskowanie diagnostyczne, wykluczanie

Egzamin zaliczony, jakie były tego przyczyny ?

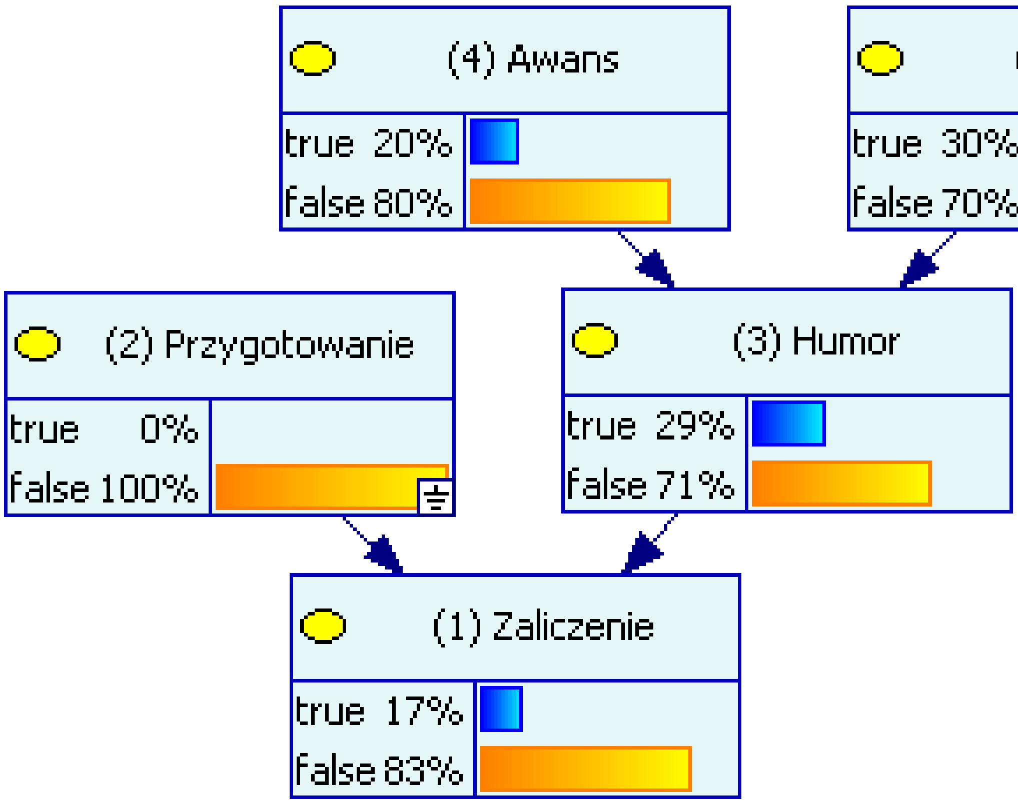


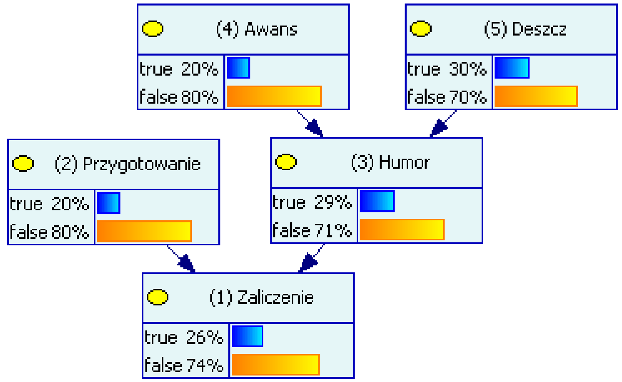


Wzrost P(A) z 20% do 40%, przy spadku P(D) - wykluczanie

Sieci bayesowskie – analiza scenariuszy

Jeśli się przygotowaliśmy, to jaka jest szansa na zaliczenie ?

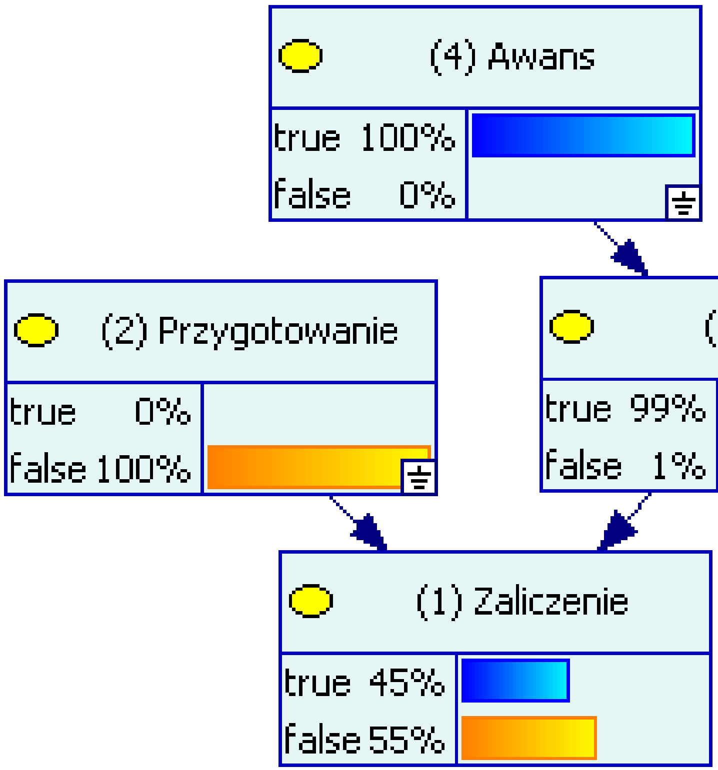


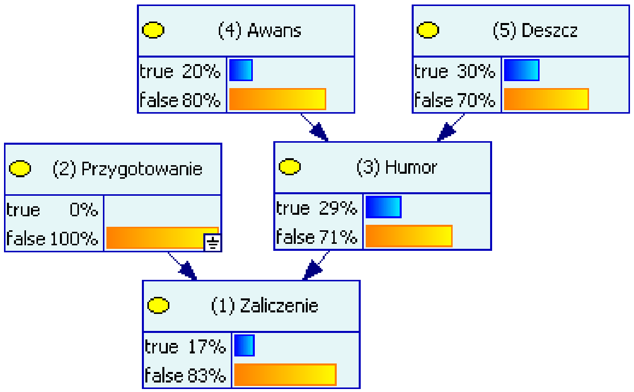


Spadek P(Z) z 26% do 17%

Sieci bayesowskie – wspomaganie podejmowania decyzji

... ale dodatkowo, Wisła awansowała i świeci słońce !



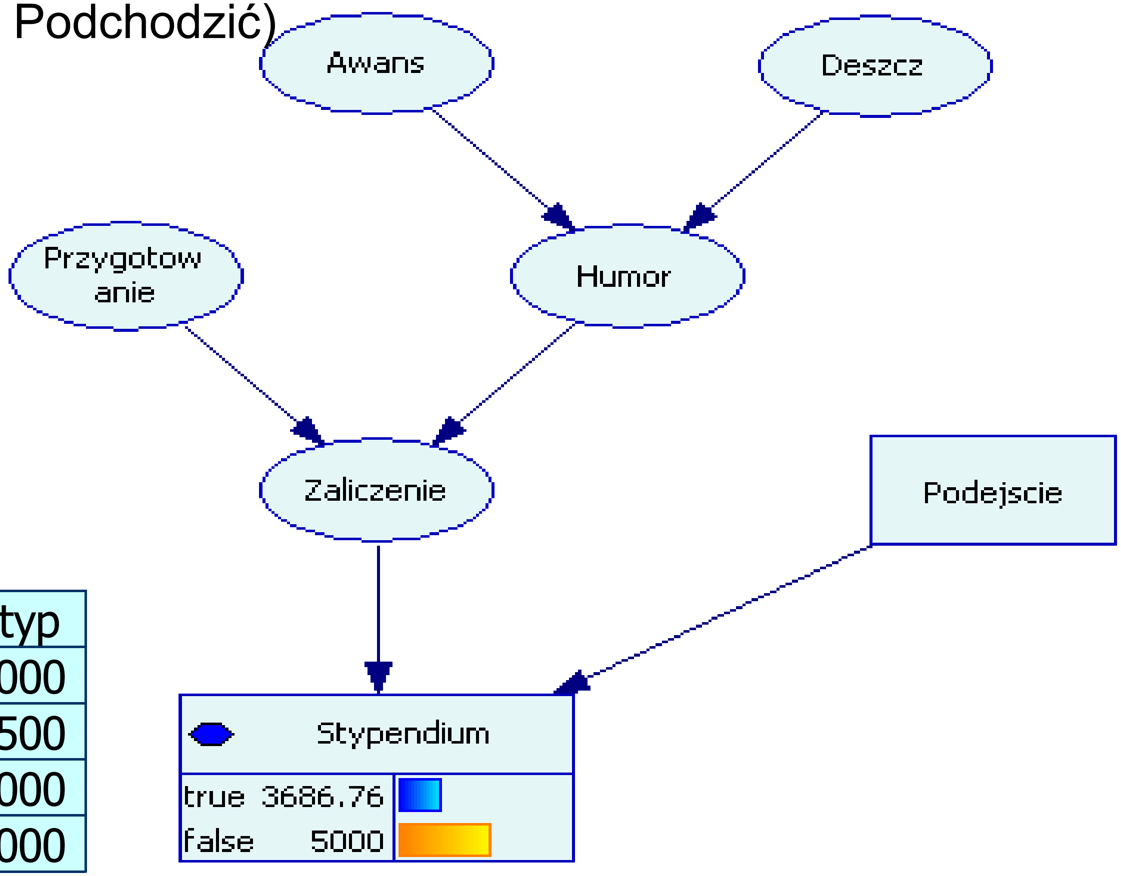


Wzrost P(Z) z 17% do 45%.

Podchodzić ?

Sieci bayesowskie – bayesowskie drzewo decyzyjne (influence diagram)

Dodajemy wierzchołki decyzyjne (Podejście) oraz użyteczności (Stypendium) i możemy mierzyć wpływ ilościowy decyzji (Podchodzić, Nie Podchodzić)



Podej	Zalicz	Styp
true	true	7000
	false	2500
false	true	5000
	false	5000

Sieci bayesowskie – drzewa decyzyjne

Czy warto iść gdy jesteśmy nieprzygotowani, świeci słońce i Wisła awansowała ?